Eco Industry
Oriented University

MATEMATIKA TEKNIK

Studi Kasus dengan Python

Penulis ;

Bakti Siregar, M.Sc., CDS.

Edisi Pertama

Matematika Teknik

Studi Kasus Python

Bakti Siregar, M.Sc.,CDS

Table of contents

Dalam era digital saat ini, data memiliki peran penting dalam pengambilan keputusan di berbagai bidang teknik dan industri. Matematika Teknik berperan dalam pemodelan, analisis, dan optimasi sistem berbasis data. Dengan memahami konsep matematika teknik dan pemrograman, profesional dapat menganalisis data, menyelesaikan persamaan teknik, serta mengembangkan sistem berbasis komputasi untuk meningkatkan efisiensi dan inovasi teknologi.

Mata kuliah ini memperkenalkan konsep dasar dan aplikasi praktis dari pemrograman dalam analisis data teknik. Materi mencakup manipulasi data numerik, analisis statistika, pemodelan matematika, dan komputasi teknik menggunakan bahasa pemrograman seperti Python. Mahasiswa akan mempelajari cara menangani data teknik, membuat visualisasi yang bermakna, serta menerapkan metode numerik dan statistika dalam menyelesaikan permasalahan rekayasa.

Selain itu, mata kuliah ini membahas preprocessing, transformasi, dan integrasi data, yang merupakan langkah penting dalam mempersiapkan data untuk analisis teknik. Mahasiswa juga akan mendapatkan pengalaman praktis dalam debugging, pengujian, dan optimasi kode untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi dalam proyek berbasis data teknik.

Kata Pengantar

Tentang Penulis

Bakti Siregar, M.Sc., CDS adalah seorang Dosen di Program Data Science ITSB. Ia memperoleh gelar Magister dari Departemen Matematika Terapan di National Sun Yat Sen University, Taiwan. Selain mengajar, Bakti juga bekerja sebagai Freelance Data Scientist untuk perusahaan terkemuka seperti JNE, Samora Group, Pertamina, dan PT. Green City Traffic.

Bakti memiliki antusiasme tinggi terhadap proyek (dan pengajaran) di bidang **Big Data Analytics, Machine Learning, Optimasi, dan Analisis Deret Waktu**, khususnya dalam **keuangan dan investasi**. Keahliannya berfokus pada bahasa pemrograman statistik seperti **R Studio** dan **Python**. Ia juga berpengalaman dalam menerapkan sistem basis data seperti **MySQL/NoSQL** untuk manajemen data serta mahir menggunakan alat **Big Data** seperti **Spark** dan **Hadoop**.

Beberapa proyeknya dapat dilihat di sini: Rpubs, Github, Website, dan Kaggle

Ucapan Terima Kasih

Matematika Teknik berperan penting dalam menganalisis dan memproses data skala besar di berbagai bidang rekayasa. Modul ini mencakup teknik esensial dalam matematika teknik, termasuk:

- Dasar yang kuat dalam Python perhitungan teknik

- Kemampuan untuk memanipulasi, menganalisis, dan memvisualisasikan data teknik secara efektif
- Pemahaman mendalam tentang peran matematika dalam pemodelan dan analisis data teknik
- Keterampilan praktis dalam menerapkan metode numerik dan komputasi teknik dalam dunia nyata

Buku ini dirancang untuk pemula yang ingin membangun fondasi kuat dalam Matematika Teknik, sekaligus memahami pentingnya konsep dan penerapan dalam berbagai disiplin teknik.

Saya mengapresiasi partisipasi aktif para pembaca, yang melalui diskusi dan pertanyaan telah memperkaya pengalaman belajar. Semoga materi ini menjadi panduan praktis dalam menerapkan matematika teknik pada berbagai proyek teknik.

Umpan Balik & Saran

Masukan Anda sangat penting dalam meningkatkan modul ini. Kami mengundang semua peserta untuk berbagi pendapat mengenai isi, struktur, dan kejelasan materi. Saran untuk topik tambahan atau bagian yang memerlukan penjelasan lebih lanjut sangat kami hargai.

Dengan dukungan dan kontribusi Anda, kami bertujuan untuk menyempurnakan E-book ini agar menjadi sumber yang lebih komprehensif untuk Pemrograman Data Science. Terima kasih atas partisipasi Anda!

Untuk umpan balik dan saran, silakan hubungi:

- sciencelabs@outlook.com
- siregarbakti@gmail.com
- siregarbakti@itsb.ac.id

Chapter 1

Pendahuluan

1.1 Pengantar

Dalam dunia komputasi dan analisis numerik, berbagai teknik matematika digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kompleks yang tidak dapat diselesaikan secara analitis. Buku ini bertujuan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif mengenai berbagai metode numerik dan pemodelan matematika yang sering digunakan dalam berbagai disiplin ilmu, mulai dari sains hingga rekayasa.

Metode numerik merupakan teknik penyelesaian masalah matematika dengan pendekatan angka dan algoritma yang dapat diterapkan dalam komputer. Pemodelan matematika, di sisi lain, digunakan untuk merepresentasikan sistem nyata dalam bentuk persamaan dan hubungan matematis. Dengan kombinasi keduanya, banyak permasalahan di berbagai bidang seperti fisika, teknik, ekonomi, dan biologi dapat diselesaikan dengan efisiensi tinggi.

Buku ini disusun secara sistematis dengan berbagai topik utama yang mencakup interpolasi, diferensiasi, integrasi, penyelesaian persamaan nonlinier, serta berbagai jenis persamaan diferensial dan pemodelan stokastik maupun regresi. Setiap bab dalam buku ini dirancang untuk memberikan pemahaman konsep dasar, metode numerik yang umum digunakan, serta penerapan praktisnya dalam berbagai kasus. Selain itu, contoh soal dan implementasi algoritma dalam bahasa pemrograman juga disediakan untuk memperjelas penerapan teoritis dalam dunia nyata.

1.2 Cakupan Buku

1.2.1 Interpolasi

Interpolasi adalah metode matematika yang digunakan untuk memperkirakan nilai suatu variabel berdasarkan sekumpulan titik data yang diketahui. Dalam teknik tambang, interpolasi digunakan untuk memperkirakan distribusi kandungan mineral, topografi bawah tanah, dan model geologi berdasarkan sampel yang terbatas.

Beberapa penerapan interpolasi dalam industri pertambangan meliputi:

- **Estimasi Cadangan Mineral** → Menentukan kandungan bijih di antara titik-titik bor eksplorasi.
- **Modeling Geologi** → Membantu dalam pemetaan struktur bawah tanah berdasarkan data sampel.
- **Pemantauan Stabilitas Lereng** → Memperkirakan deformasi dan pergerakan tanah berdasarkan pengukuran sensor.
- **Perencanaan Tambang** → Menggunakan interpolasi untuk mengoptimalkan rencana penambangan berdasarkan karakteristik material.

Metode Interpolasi dalam Teknik Tambang:

- **Interpolasi Polinomial** → Digunakan untuk membangun fungsi polinomial yang melewati titik-titik data yang diketahui.
- **Interpolasi Spline** → Menggunakan polinomial terpisah yang dihubungkan dengan kelancaran tertentu, cocok untuk model topografi.
- **Metode Inverse Distance Weighting (IDW)** → Metode berbasis jarak yang sering digunakan untuk mengestimasi kandungan mineral.
- **Kriging** → Metode geostatistik yang lebih akurat untuk estimasi spasial dalam eksplorasi tambang.

Interpolasi polinomial Newton digunakan dalam teknik tambang untuk memperkirakan nilai kandungan mineral atau parameter geoteknik lainnya berdasarkan titik sampel.

Interpolasi Newton digunakan untuk memperkirakan nilai suatu fungsi berdasarkan sekumpulan titik data yang diketahui. Rumus umumnya adalah:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$$

di mana:

- x → Koordinat titik di mana kadar mineral akan diestimasi.
- $f(x)$→ Nilai kadar mineral di titik yang sudah diketahui.
- $f[x_0, x_1, ..., x_k]$→ Selisih terbagi (*divided differences*), yang dihitung dengan rumus:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

dan seterusnya.

Contoh Penerapan:

Misalkan dilakukan pengujian kandungan mineral pada titik-titik berikut:

Lokasi	Kedalaman (m)	Kandungan Bijih (%)
A	100	2.5

Lokasi	Kedalaman (m)	Kandungan Bijih (%)
B	150	2.7
C	200	3.0
D	250	3.4
E	300	3.8

Kita ingin memperkirakan kandungan bijih di lokasi **175 m** menggunakan interpolasi Newton.

Langkah 1: Hitung Selisih Terbagi

Selisih Pertama:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f(150) - f(100)}{150 - 100} = \frac{2.7 - 2.5}{50} = 0.004 \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f(200) - f(150)}{200 - 150} = \frac{3.0 - 2.7}{50} = 0.006 \\
f[x_2, x_3] &= \frac{f(250) - f(200)}{250 - 200} = \frac{3.4 - 3.0}{50} = 0.008 \\
f[x_3, x_4] &= \frac{f(300) - f(250)}{300 - 250} = \frac{3.8 - 3.4}{50} = 0.008
\end{aligned}$$

Selisih Kedua:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{200 - 100} = \frac{0.006 - 0.004}{100} = 0.00002 \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{250 - 150} = \frac{0.008 - 0.006}{100} = 0.00002 \\
f[x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{300 - 200} = \frac{0.008 - 0.008}{100} = 0
\end{aligned}$$

Selisih Ketiga:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{250 - 100} \\
&= \frac{0.00002 - 0.00002}{150} = 0 \\
f[x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{300 - 150} \\
&= \frac{0 - 0.00002}{150} = -0.0000001333
\end{aligned}$$

Langkah 2: Bentuk Polinomial Newton

$$\begin{aligned}
P_4(x) = f(100) &+ f[x_0, x_1](x - 100) + f[x_0, x_1, x_2](x - 100)(x - 150) \\
&+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - 100)(x - 150)(x - 200) \\
&+ f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - 100)(x - 150)(x - 200)(x - 250)
\end{aligned}$$

Substitusi nilai:

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = {} & 2.5 + 0.004(x-100) + 0.00002(x-100)(x-150) \\
& + 0(x-100)(x-150)(x-200) - 0.0000001333(x-100)(x-150)(x-200)(x-250)
\end{aligned}
$$

1.2.1.1 Langkah 3: Substitusi x = 175

$$
\begin{aligned}
P_4(175) &= 2.5 + 0.004(175-100) + 0.00002(175-100)(175-150) \\
&\quad + 0(175-100)(175-150)(175-200) \\
&\quad - 0.0000001333(175-100)(175-150)(175-200)(175-250) \\
&= 2.5 + 0.004(75) + 0.00002(75)(25) - 0.0000001333(75)(25)(-25) \\
&= 2.5 + 0.3 + 0.0375 + 0.000625 \\
&= 2.8375
\end{aligned}
$$

Jadi, kandungan bijih yang diperkirakan pada lokasi **175 m** adalah **2.84%**.

1.2.2 Diferensiasi

Bab ini mengulas **diferensiasi numerik**, yang digunakan untuk mendekati turunan suatu fungsi secara numerik. Diferensiasi numerik banyak diterapkan dalam berbagai bidang, seperti simulasi fisik, analisis sensitivitas, dan optimasi. Dalam **industri pertambangan**, diferensiasi dapat digunakan untuk menganalisis perubahan kandungan mineral atau sifat fisik material seiring dengan waktu atau perubahan kondisi lingkungan.

Beberapa penerapan **diferensiasi** dalam industri pertambangan meliputi:

- **Analisis Perubahan Kadar Mineral** → Menganalisis perubahan kadar mineral pada titik-titik eksplorasi yang berbeda.
- **Modeling Stabilitas Lereng** → Menggunakan turunan untuk menganalisis perubahan kekuatan tanah atau batuan di lereng.
- **Perhitungan Gradien Sifat Geologi** → Memodelkan perubahan sifat fisik dan kimia batuan berdasarkan data dari pengeboran dan pengukuran lainnya.
- **Simulasi Perubahan Lingkungan Tambang** → Menganalisis turunan dalam simulasi perubahan lingkungan atau distribusi sumber daya.

Metode **diferensiasi numerik** yang paling umum digunakan adalah **beda hingga**, yang memungkinkan kita untuk menghitung turunan suatu fungsi dengan pendekatan numerik. Salah satu metode dalam **diferensiasi numerik** adalah **beda hingga maju**, yang digunakan untuk mendekati turunan pertama suatu fungsi pada titik x. Rumusnya adalah sebagai berikut:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Di mana:

- $f'(x)$ adalah turunan pertama dari fungsi $f(x)$
- x adalah titik di mana kita ingin menghitung turunan.

- h adalah selisih kecil antara titik x dan titik berikutnya, yang digunakan untuk menghitung perbedaan antara nilai fungsi pada dua titik yang berdekatan.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin menghitung turunan dari fungsi $f(x) = x^2$ pada titik $x = 2$ dengan $h = 0.014$.

Langkah 1: Substitusi Nilai dalam Rumus Beda Hingga Maju

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.01) - f(2)}{0.01}$$
$$f'(2) \approx \frac{f(2.01) - f(2)}{0.01}$$
$$f'(2) \approx \frac{(2.01)^2 - (2)^2}{0.01}$$

Langkah 2: Hitung Nilai Fungsi

$$f(2.01) = (2.01)^2 = 4.0401$$
$$f(2) = (2)^2 = 4$$

Langkah 3: Hitung Perbedaan dan Turunan

$$f'(2) \approx \frac{4.0401 - 4}{0.01} = \frac{0.0401}{0.01} = 4.01$$

Jadi, turunan pertama dari $f(x) = x^2$ pada titik $x = 2$ adalah **4.01**.

1.2.3 Integrasi

Bab ini membahas **integrasi numerik**, yang merupakan metode untuk menghitung nilai integral suatu fungsi secara numerik. Integrasi numerik banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti **keuangan**, **analisis spektral**, dan **pemrosesan sinyal**. Dalam **industri pertambangan**, integrasi numerik dapat digunakan untuk menghitung volume cadangan mineral, analisis data geofisika, atau menghitung estimasi sumber daya.

Beberapa penerapan **integrasi numerik** dalam industri pertambangan meliputi:

- **Estimasi Volume Cadangan** → Menghitung volume batuan atau mineral dalam suatu area berdasarkan hasil pemetaan geologi dan geofisika.
- **Analisis Data Seismik** → Mengintegrasikan data seismik untuk memodelkan struktur bawah permukaan tanah.
- **Pemodelan Sumber Daya Alam** → Menggunakan integrasi numerik untuk memperkirakan total sumber daya yang dapat dieksploitasi berdasarkan data eksplorasi.
- **Analisis Perubahan Lingkungan Tambang** → Menggunakan integrasi untuk memodelkan perubahan yang terjadi pada sistem lingkungan di sekitar lokasi tambang.

Metode **integrasi numerik** yang umum digunakan antara lain **aturan trapesium**, **aturan Simpson**, dan metode **kuadratur lainnya** yang membantu menghitung integral untuk fungsi-fungsi yang sulit dihitung secara analitik.

Salah satu metode yang sering digunakan untuk **integrasi numerik** adalah **aturan trapesium**. Metode ini mengestimasi nilai integral dengan cara mendekati daerah di bawah kurva fungsi $f(x)$ sebagai trapezoid. Rumusnya adalah sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Di mana:

- a dan b adalah batas integral.
- h adalah lebar interval, yang dihitung dengan $h = b - a$.
- $f(a)$ dan $f(b)$ adalah nilai fungsi pada batas integral a dan b.

Metode **aturan trapesium** dapat diperluas dengan membagi interval integral menjadi subinterval lebih kecil untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin menghitung integral dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[1, 3]$.

Langkah 1: Tentukan Nilai Batas

Batas integral adalah $a = 1$ dan $b = 3$.

Langkah 2: Hitung Lebar Interval

$$h = b - a = 3 - 1 = 2$$

Langkah 3: Hitung Nilai Fungsi pada Batas

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

1.2.3.1 Langkah 4: Hitung Integral dengan Aturan Trapesium

$$\int_1^3 x^2 dx \approx \frac{2}{2}(f(1) + f(3)) = 1 \times (1 + 9) = 10$$

Jadi, hasil perkiraan integral dari $f(x) = x^2$ pada interval $[1, 3]$ dengan aturan trapesium adalah **10**.

1.2.4 Persamaan Nonlinier

Bab ini membahas tentang **persamaan nonlinier** dan teknik-teknik yang digunakan untuk menyelesaikannya. Persamaan nonlinier adalah persamaan yang tidak dapat dituliskan sebagai fungsi linear terhadap variabelnya. Penyelesaian persamaan semacam ini sering kali diperlukan dalam **perancangan teknik**, **pemodelan ekonomi**, dan berbagai aplikasi lain di mana hubungan antara variabel tidak bersifat linear.

Beberapa penerapan penyelesaian **persamaan nonlinier** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Modeling Geologi** → Menyelesaikan persamaan nonlinier untuk memodelkan distribusi mineral di bawah permukaan tanah.
- **Perencanaan Penambangan** → Menyelesaikan sistem persamaan nonlinier untuk mengoptimalkan proses penambangan.
- **Simulasi Dinamika Batuan** → Menggunakan persamaan nonlinier untuk menghitung respons batuan terhadap tekanan dan beban.
- **Modeling Aliran Fluida** → Menghitung aliran fluida dalam reservoir menggunakan persamaan nonlinier.

Beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan **persamaan nonlinier** adalah:

- **Metode Bagi Dua** → Metode iteratif yang membagi interval pencarian menjadi dua bagian dan mencari akar dalam subinterval.
- **Metode Newton-Raphson** → Metode berbasis turunan yang memperbaiki estimasi akar secara iteratif.
- **Metode Secant** → Metode yang tidak memerlukan turunan fungsi, menggunakan dua titik untuk memperkirakan akar.
- **Metode Fixed Point Iteration** → Metode yang menyelesaikan persamaan dengan menyusun ulang persamaan menjadi bentuk yang lebih mudah dihitung secara iteratif.

Metode **Newton-Raphson** adalah salah satu metode yang paling efisien untuk mencari akar persamaan nonlinier. Metode ini menggunakan **derivatif fungsi** untuk memperbaiki pendekatan akar persamaan secara iteratif. Rumus metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Di mana:

- $x_n $ adalah nilai pendekatan akar pada iterasi ke-n.
- $f(x_n)$ adalah nilai fungsi pada titik x_n.
- $f'(x_n)$ adalah turunan fungsi pada titik x_n.
- x_{n+1} adalah nilai akar yang lebih baik pada iterasi berikutnya.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin menemukan akar dari persamaan:

$$f(x) = x^2 - 4$$

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

Langkah 1: Tentukan Fungsi dan Turunannya

Fungsi yang diberikan adalah:

$$f(x) = x^2 - 4$$

Turunan dari fungsi ini adalah:

$$f'(x) = 2x$$

Langkah 2: Pilih Titik Awal x_0

Pilih titik awal $x_0 = 3$ (Anda dapat memilih titik awal lain yang mendekati akar).

Langkah 3: Iterasi Menggunakan Rumus Newton-Raphson

Iterasi pertama:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
&= 3 - \frac{3^2 - 4}{2 \times 3} \\
&= 3 - \frac{9 - 4}{6} \\
&= 3 - \frac{5}{6} \\
&= 2.1667
\end{aligned}$$

Iterasi kedua:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
&= 2.1667 - \frac{2.1667^2 - 4}{2 \times 2.1667} \\
&= 2.1667 - \frac{4.6944 - 4}{4.3334} \\
&= 2.1667 - \frac{0.6944}{4.3334} \\
&= 2.1667 - 0.1601 \\
&= 2.0066
\end{aligned}$$

Iterasi ketiga:

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\
&= 2.0066 - \frac{2.0066^2 - 4}{2 \times 2.0066} \\
&= 2.0066 - \frac{4.0265 - 4}{4.0132} \\
&= 2.0066 - \frac{0.0265}{4.0132} \\
&= 2.0066 - 0.0066 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Hasilnya, setelah beberapa iterasi, kita mendapatkan akar $x = 2$, yang merupakan solusi dari persamaan $f(x) = x^2 - 4$.

1.2.5 Persamaan Diferensial Biasa

Bab ini membahas tentang **persamaan diferensial biasa (ODE)** dan teknik-teknik yang digunakan untuk menyelesaikannya. **ODE** menggambarkan hubungan antara fungsi dan turunan pertamanya, yang sering muncul dalam **perancangan sistem dinamis**, **analisis sirkuit listrik**, dan **pemodelan epidemiologi**.

Beberapa penerapan **persamaan diferensial biasa (ODE)** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Modeling Aliran Fluida** → Menggunakan ODE untuk menggambarkan aliran fluida dalam reservoir tambang.
- **Simulasi Dinamika Batuan** → Menyelesaikan ODE untuk memodelkan respons batuan terhadap tekanan dan deformasi.
- **Perencanaan Penambangan** → Menggunakan ODE untuk memodelkan sistem dinamis dalam optimasi proses penambangan.
- **Pemodelan Kestabilan Lereng** → Menggunakan ODE untuk memprediksi pergerakan tanah dan kestabilan lereng tambang.

Berikut adalah beberapa metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan **persamaan diferensial biasa (ODE)**:

- **Metode Euler** → Metode numerik yang digunakan untuk memperkirakan solusi ODE berdasarkan nilai pada titik awal dan turunan fungsi.
- **Metode Runge-Kutta** → Metode yang lebih akurat dibandingkan dengan metode Euler, menggunakan pendekatan lebih kompleks untuk menghitung nilai solusi ODE.
- **Metode Adams-Bashforth** → Metode numerik yang menggunakan pendekatan multistep untuk memperkirakan solusi ODE.
- **Metode Predictor-Corrector** → Metode iteratif yang digunakan untuk meningkatkan akurasi solusi numerik.

Metode Euler adalah salah satu metode paling dasar dan sederhana untuk menyelesaikan **persamaan diferensial biasa (ODE)** secara numerik. Metode ini menggunakan informasi pada titik sebelumnya untuk memperkirakan solusi pada titik berikutnya. Rumus metode Euler adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Di mana:

- y_n adalah nilai solusi pada titik x_n.
- h adalah langkah atau interval perubahan pada x.
- $f(x_n, y_n)$** adalah nilai fungsi turunan pada titik (x_n, y_n).

Contoh Penerapan:

Misalkan kita diberikan persamaan diferensial biasa:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 1$, kita akan menggunakan **metode Euler** untuk menghitung nilai y pada titik $x = 0.1$ dengan langkah $h = 0.1$.

Langkah 1: Tentukan Fungsi dan Kondisi Awal

Diberikan:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Kondisi awal:

$$y(0) = 1$$

Langkah 2: Hitung Nilai pada Titik $x_1 = 0.1$

Menggunakan rumus Euler, kita dapat menghitung nilai y pada $x_1 = 0.1$.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Dengan $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, dan $h = 0.1$, kita substitusikan ke dalam rumus:

$$y_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1 + 0.1 = 1.1$$

Langkah 3: Lanjutkan Perhitungan untuk Titik Berikutnya

Jika kita ingin menghitung nilai y pada $x_2 = 0.2$, kita ulangi langkah yang sama:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.2 = 1.1 + 0.12 = 1.22$$

1.2.6 Persamaan Diferensial Parsial

Bab ini membahas tentang **persamaan diferensial parsial (PDE)** dan teknik-teknik numerik yang digunakan untuk menyelesaikannya. **PDE** adalah persamaan yang melibatkan turunan parsial dari suatu fungsi lebih dari satu variabel. PDE sering muncul dalam banyak aplikasi teknik dan ilmiah, seperti **analisis perpindahan panas**, **mekanika fluida**, dan **teori gelombang**.

Beberapa penerapan **persamaan diferensial parsial (PDE)** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Simulasi Perpindahan Panas** → Menghitung distribusi suhu dalam sistem penambangan atau reservoir geotermal menggunakan PDE.
- **Analisis Dinamika Fluida** → Menggunakan PDE untuk memodelkan aliran fluida dalam tambang bawah tanah.
- **Stabilitas Lereng** → Menggunakan PDE untuk memodelkan pergerakan tanah dan deformasi pada lereng tambang.

- **Modeling Proses Geokimia** → Menyelesaikan PDE untuk memodelkan reaksi kimia dan proses pelindian dalam industri tambang.

Berikut adalah beberapa metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan **persamaan diferensial parsial (PDE)**:

- **Metode Beda Hingga (Finite Difference Method)** → Metode numerik yang menggunakan grid diskret untuk menghitung solusi PDE dengan mendekati turunan parsial menggunakan perbedaan terhingga.
- **Metode Elemen Hingga (Finite Element Method)** → Metode numerik yang membagi domain masalah menjadi elemen-elemen kecil, sangat cocok untuk geometri yang kompleks.
- **Metode Volume Hingga (Finite Volume Method)** → Metode yang mengalikan integral PDE dengan volume kecil untuk menghitung solusi numerik.
- **Metode Spektral** → Metode yang menggunakan basis fungsi global (seperti Fourier atau polinomial) untuk menyelesaikan PDE dengan presisi tinggi.

Metode **beda hingga** adalah salah satu metode numerik yang paling umum digunakan untuk menyelesaikan **persamaan diferensial parsial (PDE)**. Metode ini mendekati turunan parsial dengan perbedaan antara nilai fungsi di titik-titik diskret pada grid. Untuk PDE waktu kontinu, rumus beda hingga untuk turunan waktu dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Di mana:

- u_i adalah nilai fungsi pada titik grid i.
- h adalah langkah atau interval grid dalam variabel x atau t.
- u_{i+1}, u_{i-1} adalah nilai fungsi pada titik grid yang lebih besar dan lebih kecil dari i, masing-masing.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita diberikan persamaan **PDE** sederhana untuk memodelkan perpindahan panas pada batang logam satu dimensi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dengan kondisi awal dan batas:

- $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ untuk $0 \leq x \leq 1$
- $u(0, t) = u(1, t) = 0$

Langkah 1: Diskretisasi PDE menggunakan Metode Beda Hingga

Dengan mendiskretkan domain waktu dan ruang, kita memperoleh perbedaan terhingga untuk turunan waktu dan ruang. Untuk turunan waktu, kita gunakan rumus beda hingga pertama:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Sedangkan untuk turunan ruang, kita gunakan rumus beda hingga kedua:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Dengan menggabungkan kedua diskretisasi, kita memperoleh rumus untuk menghitung nilai suhu pada waktu berikutnya $ t_{n+1} $:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Langkah 2: Iterasi untuk Menghitung Solusi

Misalkan kita tentukan parameter sebagai berikut:

- $\alpha = 0.01$
- $\Delta x = 0.1$
- $\Delta t = 0.01$

Dengan kondisi awal $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ dan kondisi batas $u(0, t) = u(1, t) = 0$, kita dapat menghitung nilai $u(x, t)$ pada langkah waktu berikutnya menggunakan rumus beda hingga di atas.

1.2.7 Pemodelan Stokastik

Bab ini membahas **pemodelan stokastik**, yang digunakan untuk merepresentasikan sistem yang mengandung ketidakpastian. **Pemodelan stokastik** sering kali digunakan untuk menggambarkan fenomena yang dipengaruhi oleh variabel acak. Metode-metode yang digunakan dalam pemodelan stokastik, seperti **proses Markov** dan **simulasi Monte Carlo**, memungkinkan kita untuk memprediksi dan menganalisis hasil dalam situasi yang tidak deterministik.

Beberapa penerapan **pemodelan stokastik** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Peramalan Cadangan Mineral** → Menggunakan simulasi stokastik untuk memperkirakan ketidakpastian dalam estimasi cadangan mineral.
- **Modeling Geostatistik** → Menggunakan proses Markov atau simulasi Monte Carlo untuk memodelkan distribusi spasial mineral di dalam tanah.
- **Optimasi Proses Tambang** → Menggunakan pemodelan stokastik untuk merencanakan dan mengoptimalkan operasi tambang dengan mempertimbangkan ketidakpastian dalam parameter operasi.
- **Simulasi Risiko** → Menerapkan simulasi Monte Carlo untuk memperkirakan potensi risiko dalam proyek tambang, seperti fluktuasi harga bahan bakar atau biaya operasional.

Beberapa metode pemodelan stokastik yang sering digunakan dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Proses Markov** → Digunakan untuk memodelkan perubahan keadaan yang terjadi secara acak dalam sistem, seperti pergerakan kadar mineral atau kondisi peralatan tambang.
- **Simulasi Monte Carlo** → Teknik simulasi yang digunakan untuk mengevaluasi hasil ketidakpastian dalam perencanaan dan pengambilan keputusan di pertambangan, termasuk dalam estimasi cadangan dan analisis risiko.
- **Metode Simulasi Discrete Event (DES)** → Menggunakan simulasi berbasis waktu untuk menggambarkan proses yang terjadi dalam sistem yang melibatkan urutan kejadian acak.
- **Model Proses Poisson** → Digunakan untuk memodelkan kejadian acak dalam waktu atau ruang, seperti distribusi kejadian ledakan atau kecelakaan dalam operasi tambang.

Proses **Markov** adalah model stokastik di mana hasil masa depan hanya bergantung pada keadaan saat ini dan tidak pada sejarah sebelumnya. Dalam konteks pertambangan, ini dapat digunakan untuk memodelkan pergerakan kadar mineral atau status peralatan tambang yang berubah secara acak.

Rumus dasar untuk proses **Markov** adalah:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}$$

Di mana:

- X_n adalah keadaan sistem pada waktu langkah ke-n.
- P_{ij} adalah probabilitas transisi dari keadaan i ke keadaan j pada satu langkah waktu.
- $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ adalah probabilitas berada di keadaan j pada langkah waktu ke-n+1, mengingat keadaan pada langkah waktu ke-n.

Simulasi Monte Carlo adalah metode stokastik yang digunakan untuk menghitung hasil dari sebuah model yang memiliki ketidakpastian atau variabel acak dengan melakukan simulasi berulang. Dalam konteks pertambangan, Monte Carlo sering digunakan untuk memperkirakan distribusi cadangan mineral atau risiko operasi tambang.

Rumus dasar untuk simulasi Monte Carlo adalah:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Di mana:

- Y adalah hasil yang ingin diprediksi (misalnya, estimasi cadangan mineral).
- $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah variabel acak yang mempengaruhi hasil, yang dipilih berdasarkan distribusi probabilitas tertentu.
- $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ adalah fungsi yang menggambarkan hubungan antara variabel acak dan hasil yang ingin dihitung.

Dengan mengulang simulasi ini ribuan atau jutaan kali, kita dapat memperoleh distribusi hasil yang memperhitungkan ketidakpastian dalam model.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin memperkirakan estimasi cadangan mineral di sebuah tambang dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Dalam hal ini, kita dapat mendefinisikan variabel acak seperti kadar mineral, kedalaman lapisan bijih, dan volume bahan baku yang tersedia.

Langkah 1: Tentukan variabel acak dan distribusi probabilitas

Misalnya:

- X_1 adalah kadar mineral, yang mengikuti distribusi normal dengan rata-rata 5% dan deviasi standar 1%.
- X_2 adalah kedalaman lapisan bijih, yang mengikuti distribusi uniform antara 50m dan 150m.
- X_3 adalah volume bahan baku, yang mengikuti distribusi lognormal dengan rata-rata 100.000 ton dan deviasi standar 20.000 ton.

Langkah 2: Tentukan fungsi hubungan

Fungsi untuk memperkirakan cadangan mineral dapat berupa:

$$Y = X_1 \times X_2 \times X_3$$

Langkah 3: Lakukan simulasi Monte Carlo

Simulasikan ribuan atau juta-an kombinasi nilai untuk X_1, X_2, dan X_3 berdasarkan distribusi probabilitas yang telah ditentukan. Hitung hasil Y pada setiap simulasi dan kumpulkan hasilnya untuk memperoleh distribusi cadangan mineral yang dapat digunakan untuk analisis lebih lanjut.

1.2.8 Pemodelan Regresi

Bab ini membahas **teknik regresi** dalam **analisis data**, yang digunakan untuk memprediksi hubungan antara variabel. **Regresi** banyak digunakan di berbagai bidang seperti **ekonomi**, **ilmu sosial**, **kedokteran**, dan bahkan **industri pertambangan** untuk memperkirakan variabel yang tidak dapat diukur langsung berdasarkan variabel yang dapat diukur.

Metode regresi memungkinkan kita untuk membangun model yang menggambarkan hubungan antara satu atau lebih variabel bebas dengan variabel terikat. Dua metode yang paling umum digunakan adalah **regresi linear** dan **regresi non-linear**, serta **regresi berganda** yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas.

Beberapa penerapan **regresi** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Estimasi Kandungan Mineral** → Menggunakan regresi untuk memodelkan hubungan antara kedalaman pengeboran dan kadar mineral di suatu area.
- **Peramalan Produksi** → Menggunakan regresi untuk memprediksi produksi tambang berdasarkan variabel seperti jumlah tenaga kerja, kecepatan peralatan, dan kondisi geologi.
- **Analisis Kinerja Peralatan** → Menggunakan regresi untuk memprediksi masa pakai peralatan tambang berdasarkan faktor-faktor seperti usia, pemeliharaan, dan beban operasional.

- **Penentuan Biaya Operasional** → Menggunakan regresi untuk memodelkan hubungan antara faktor-faktor ekonomi dan biaya operasional dalam proses pertambangan.

Jenis-jenis Regresi:

- **Regresi Linear** → Digunakan untuk memodelkan hubungan linier antara satu variabel bebas dengan variabel terikat.
- **Regresi Non-linear** → Digunakan untuk memodelkan hubungan yang tidak mengikuti pola linier.
- **Regresi Berganda** → Digunakan untuk memodelkan hubungan antara lebih dari satu variabel bebas dan variabel terikat.

Regresi linear adalah metode yang digunakan untuk memodelkan hubungan linier antara variabel independen x dan variabel dependen y. Model regresi linear mengikuti rumus:

$$y = a + bx$$

Di mana:

- y adalah variabel terikat (dependent variable),
- x adalah variabel bebas (independent variable),
- a adalah konstanta (intercept),
- b adalah koefisien regresi (slope), yang menunjukkan seberapa besar perubahan y terkait dengan perubahan x.

Regresi berganda digunakan untuk memodelkan hubungan antara lebih dari satu variabel bebas dan variabel terikat. Bentuk umum dari **regresi berganda** adalah:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$

Di mana:

- y adalah variabel terikat,
- $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah variabel bebas,
- $b_1, b_2, ..., b_n$ adalah koefisien regresi untuk setiap variabel bebas, yang menunjukkan pengaruh masing-masing variabel terhadap y.

Misalkan kita memiliki data hubungan antara **jumlah tenaga kerja** (x) dan **jumlah produksi** (y) di sebuah tambang.

Jumlah Tenaga Kerja (x)	Jumlah Produksi (y)
50	200
60	250
70	300
80	350

Kita ingin memodelkan hubungan antara **jumlah tenaga kerja** dan **jumlah produksi** menggunakan regresi linear.

Langkah 1: Tentukan rumus regresi

Rumus regresi linear adalah:

$$y = a + bx$$

Di mana a adalah intercept dan b adalah koefisien regresi yang menunjukkan hubungan antara $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$.

Langkah 2: Hitung koefisien regresi

Menggunakan metode **least squares**, kita dapat menghitung nilai a dan b. Untuk contoh ini, mari kita anggap kita sudah menghitung dan memperoleh hasil:

- $a = 100$
- $b = 3$

Langkah 3: Gunakan model untuk prediksi

Jika kita ingin memprediksi **jumlah produksi** untuk **90 tenaga kerja**, kita dapat menggunakan rumus regresi yang telah dihitung:

$$y = 100 + 3(90) = 100 + 270 = 370$$

Jadi, **jumlah produksi** yang diprediksi dengan **90 tenaga kerja** adalah **370**.

1.3 Sasaran Pembaca

Buku ini ditujukan bagi mahasiswa, peneliti, dan praktisi yang ingin memahami metode numerik dan pemodelan matematika secara lebih mendalam. Diharapkan setelah membaca buku ini, pembaca dapat menerapkan berbagai metode yang telah dipelajari dalam berbagai kasus nyata, baik dalam penelitian akademik maupun dalam dunia industri.

1.4 Struktur Buku

Setiap bab dalam buku ini dilengkapi dengan:

- **Penjelasan Teoritis:** Konsep dasar dan teori yang mendasari metode yang dibahas dengan ilustrasi dan penjelasan mendalam.
- **Algoritma dan Implementasi:** Langkah-langkah numerik serta implementasi dalam bahasa pemrograman Python.
- **Contoh Kasus dan Aplikasi:** Studi kasus nyata yang menggambarkan bagaimana metode tersebut digunakan dalam berbagai bidang, termasuk rekayasa, keuangan, dan sains data.
- **Latihan dan Soal:** Sejumlah soal latihan untuk menguji pemahaman pembaca serta solusi yang dapat membantu memperjelas konsep yang telah dipelajari.

Chapter 2

Fungsi Estimasi

Dalam analisis matematika dan pemodelan, estimasi nilai dan fungsi memainkan peran penting dalam memahami perubahan dan perilaku suatu sistem. Estimasi nilai suatu fungsi bertujuan untuk mendekati nilai fungsi di suatu titik ketika fungsi tersebut sulit dihitung secara langsung. Metode yang sering digunakan antara lain interpolasi, ekstrapolasi, dan deret Taylor.

2.1 Interpolasi

Interpolasi adalah metode untuk memperkirakan nilai suatu fungsi di antara titik-titik data yang diketahui. Ada beberapa jenis interpolasi, tetapi yang paling umum adalah **Interpolasi Linear** dan **Interpolasi Polinomial**.

2.1.1 Linear

Interpolasi linear menggunakan garis lurus untuk menghubungkan dua titik data yang diketahui. Jika kita memiliki dua titik:

$$(x_0, f(x_0)) \quad \text{dan} \quad (x_1, f(x_1))$$

maka nilai fungsi $f(x)$ untuk suatu x di antara x_0 dan x_1 dapat dihitung dengan rumus:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Untuk Penjelasan lebih detail perhatikan video dibawah ini:

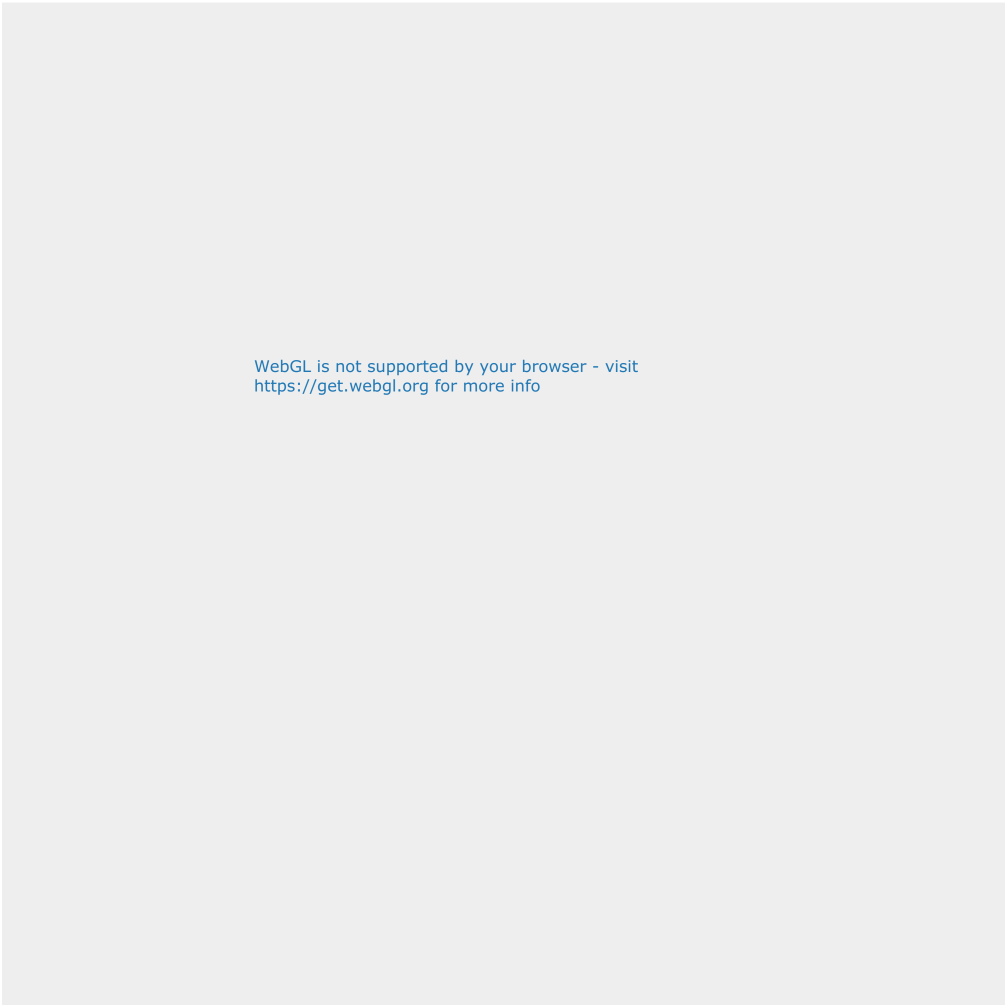
Contoh: Misalkan kita memiliki data berikut:

$f(2) = 4$
$f(4) = 8$

Kita ingin mencari $f(3)$. Dengan menggunakan rumus interpolasi linear:

$$
\begin{aligned}
f(3) &\approx 4 + \frac{8-4}{4-2}(3-2) \\
&= 4 + \frac{4}{2}(1) \\
&= 4 + 2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Jadi, hasil interpolasi $f(3) = 6$.



2.1.2 Polinomial

Ketika kita memiliki lebih dari dua titik data, interpolasi polinomial dapat digunakan untuk mendapatkan pendekatan yang lebih akurat. Salah satu metode yang umum digunakan adalah **Interpolasi Lagrange**, yang mendefinisikan polinomial interpolasi $P_n(x)$ sebagai:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

dengan **basis Lagrange** yang dirumuskan sebagai:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Misalkan kita memiliki tiga titik:

Titik 1: (1,2)
Titik 2: (2,5)
Titik 3: (4,3)

Polinomial interpolasi yang kita cari adalah **polinomial derajat 2** yang melalui ketiga titik ini. Langkah pertama, tentukan basis Lagrange terlebih dahulu:

Basis untuk $L_0(x)$: gunakan titik $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$, abaikan $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ &= \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} \\ &= \frac{(x-2)(x-4)}{-1 \times -3} \\ &= \frac{(x-2)(x-4)}{3} \end{aligned}$$

Basis untuk $L_1(x)$: gunakan titik $x_0 = 1$ dan $x_2 = 4$, abaikan $x_1 = 2$:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ &= \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} \\ &= \frac{(x-1)(x-4)}{1 \times -2} \\ &= -\frac{(x-1)(x-4)}{2} \end{aligned}$$

Basis untuk $L_2(x)$: gunakan titik $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$, abaikan $x_2 = 4$.

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{3 \times 2} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{6}
\end{aligned}
$$

Menyusun Polinomial Interpolasi, berdasarkan basis:

$$
P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)
$$

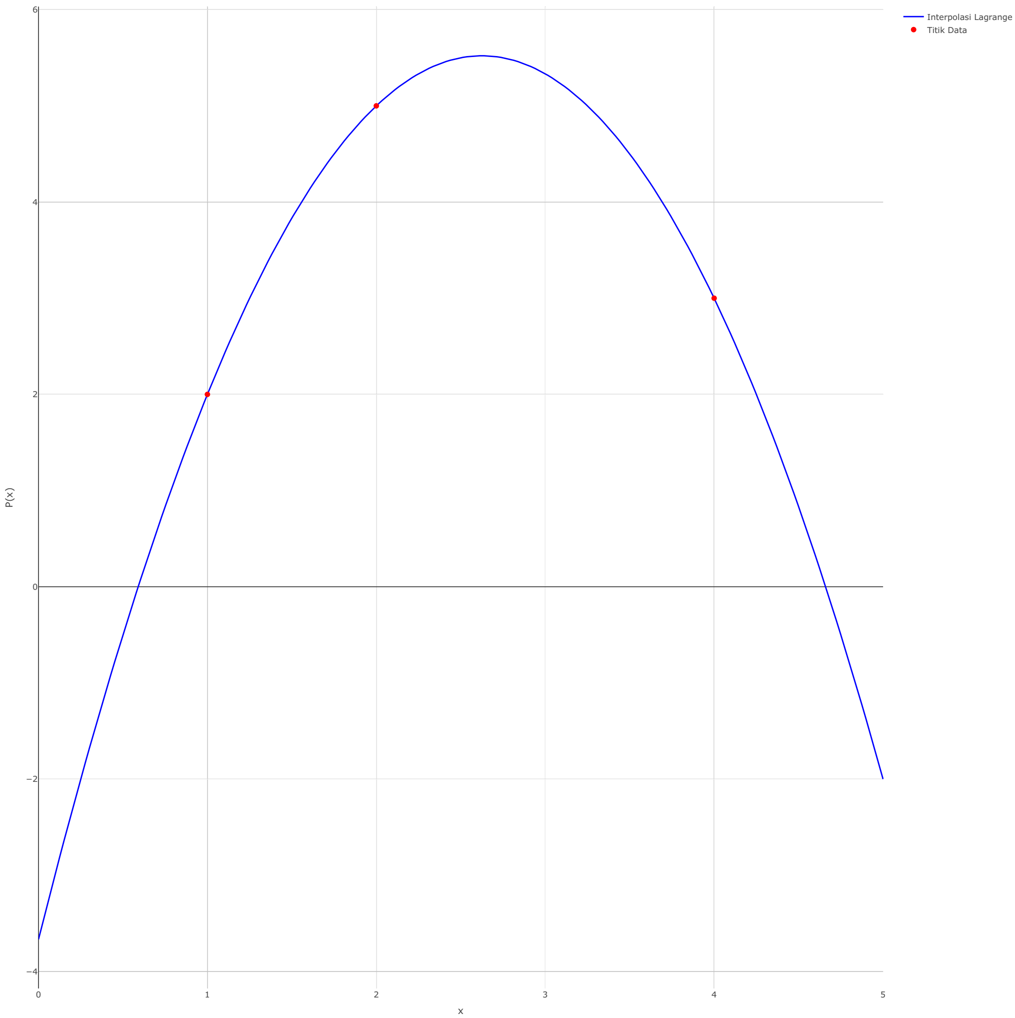
Substitusi $y_0 = 2$, $y_1 = 5$, dan $y_2 = 3$:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= 2 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{3} + 5 \cdot \left(-\frac{(x-1)(x-4)}{2}\right) + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{6} \\
&= \frac{2(x-2)(x-4)}{3} - \frac{5(x-1)(x-4)}{2} + \frac{3(x-1)(x-2)}{6}
\end{aligned}
$$

Bentuk ekspresi ini, dapat disederhanakan ke dalam pecahan persekutuan terkecil (KPK dari 3, 2, dan 6 adalah **6**):

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{4(x-2)(x-4)}{6} - \frac{15(x-1)(x-4)}{6} + \frac{5(x-1)(x-2)}{6} \\
&= \frac{4(x-2)(x-4) - 15(x-1)(x-4) + 5(x-1)(x-2)}{6}
\end{aligned}
$$

Interpolasi Lagrange memungkinkan kita menemukan polinomial yang melewati sekumpulan titik dengan cara yang sistematis dan akurat. Dengan langkah-langkah ini, kita telah menentukan polinomial interpolasi **derajat 2** yang melewati titik-titik yang diberikan.



2.1.3 Linear VS Polinomial

Metode	Rumus	Kelebihan	Kekurangan
Interpolasi Linear	$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$	Sederhana, cepat, mudah dihitung	Kurang akurat jika data tidak linier
Interpolasi Polinomial	$P_n(x) = \sum f(x_i)L_i(x)$	Lebih akurat untuk data non-linier	Bisa menjadi tidak stabil jika polinomial terlalu tinggi (Runge's phenomenon)

Dengan interpolasi, kita bisa memperkirakan nilai yang tidak diketahui berdasarkan pola yang sudah ada.

2.2 Ekstrapolasi

Ekstrapolasi adalah metode untuk memperkirakan nilai suatu fungsi di **luar** rentang data yang diketahui. Berbeda dengan **Interpolasi**, yang memperkirakan nilai di antara titik-titik data yang diketahui, ekstrapolasi mencoba memprediksi nilai di luar rentang tersebut berdasarkan pola yang ada.

2.2.1 Linear

Ekstrapolasi linear menggunakan asumsi bahwa pola perubahan data mengikuti tren **garis lurus**. Jika kita memiliki dua titik data:

$$(x_0, f(x_0)) \quad \text{dan} \quad (x_1, f(x_1))$$

maka untuk memperkirakan $f(x)$ pada x yang **lebih besar atau lebih kecil** dari x_0 dan x_1, kita bisa menggunakan rumus:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

Misalkan kita memiliki data berikut:

$f(1) = 2$
$f(2) = 4$

Kita ingin memperkirakan $f(3)$. Dengan asumsi bahwa pola perubahan **linier**, kita dapat menghitung:

$$\begin{aligned} f(3) &\approx f(2) + (f(2) - f(1)) \\ &= 4 + (4 - 2) \\ &= 4 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Jadi, hasil ekstrapolasi $f(3) = 6$.

2.2.2 Polinomial

Jika data memiliki pola yang lebih kompleks (bukan linier), kita bisa menggunakan **polinomial** untuk pendekatan yang lebih akurat. Salah satu metode yang umum digunakan adalah **Ekstrapolasi Polinomial Lagrange**, yang menggunakan rumus:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

dengan **basis Lagrange**:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Namun, ekstrapolasi polinomial sering kali **tidak stabil**, terutama jika digunakan pada rentang yang jauh dari data asli.

2.3 Interpolasi VS Ekstrapolasi

Metode	**Tujuan**	**Kelebihan**	**Kekurangan**
Interpolasi	Memperkirakan nilai di antara titik-titik data yang diketahui	Lebih akurat karena masih dalam rentang data asli	Tidak bisa digunakan untuk memprediksi data di luar rentang
Ekstrapolasi	Memperkirakan nilai di luar rentang data yang diketahui	Bisa digunakan untuk prediksi masa depan	Bisa tidak akurat jika pola data berubah

Dengan memahami ekstrapolasi, kita bisa **memperkirakan tren** suatu fenomena berdasarkan pola yang ada.

Chapter 3

Diferensial

3.1 Aturan Turunan

Turunan suatu fungsi menunjukkan **laju perubahan fungsi** terhadap variabelnya. Secara formal, turunan pertama didefinisikan sebagai:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Turunan digunakan dalam berbagai bidang seperti fisika (kecepatan dan percepatan), ekonomi (elastisitas), dan optimasi fungsi. Berikut adalah beberapa aturan dasar dalam turunan fungsi secara Analitik:

3.1.1 Aturan Pangkat (Power Rule)

Jika $f(x) = x^n$, maka:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Contoh: Misalkan $f(x) = x^4$, maka turunannya adalah:

$$f'(x) = 4x^3$$

3.1.2 Aturan Perkalian (Product Rule)

Jika $u(x)$ dan $v(x)$ adalah dua fungsi berbeda, maka:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Contoh: Misalkan $f(x) = (x^2 + 1)(x + 3)$, dengan:

$u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x$
$v = x + 3 \Rightarrow v' = 1$

Maka turunannya:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)(x+3) + (x^2+1)(1) \\ &= 2x(x+3) + x^2 + 1 \\ &= 2x^2 + 6x + x^2 + 1 \\ &= 3x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

3.1.3 Aturan Pembagian (Quotient Rule)

Jika $u(x)$ dan $v(x)$ adalah dua fungsi berbeda:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Contoh: Misalkan $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$, dengan:

$u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x$
$v = x + 2 \Rightarrow v' = 1$

Maka turunannya:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x)(x+2) - (x^2+1)(1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

3.1.4 Aturan Rantai (Chain Rule)

Jika $f(x) = g(h(x))$, maka:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Contoh: Misalkan $f(x) = (2x^3 + x + 1)^4$, gunakan aturan rantai dengan:

$g(x) = 2x^3 + x + 1$
$h(x) = g(x)^4$

Turunan dari $h(x)$:

$$\frac{d}{dx}(2x^3 + x + 1)^4 = 4(2x^3 + x + 1)^3 \cdot (6x^2 + 1)$$

Contoh Perhitungan: Misalkan diberikan fungsi:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

Turunan pertama dari fungsi ini adalah:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

Untuk $x = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3(2)^2 + 4(2) - 5 \\ &= 3(4) + 8 - 5 \\ &= 12 + 8 - 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Turunan menunjukkan laju perubahan fungsi dan digunakan dalam berbagai bidang. Aturan turunan seperti aturan pangkat, perkalian, pembagian, dan rantai sangat berguna dalam menghitung turunan berbagai jenis fungsi. Contoh perhitungan menunjukkan bagaimana menerapkan aturan turunan untuk fungsi polinomial. Dengan pemahaman ini, kita bisa lebih mudah menganalisis bagaimana suatu fungsi berubah!

3.2 Turunan Fungsi Numerik

Metode ini digunakan ketika turunan analitik sulit dihitung. Beberapa metode umum:

1. **Selisih Maju (Forward Difference)**:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. **Selisih Mundur (Backward Difference)**:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

3. **Selisih Tengah (Central Difference)** (lebih akurat):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

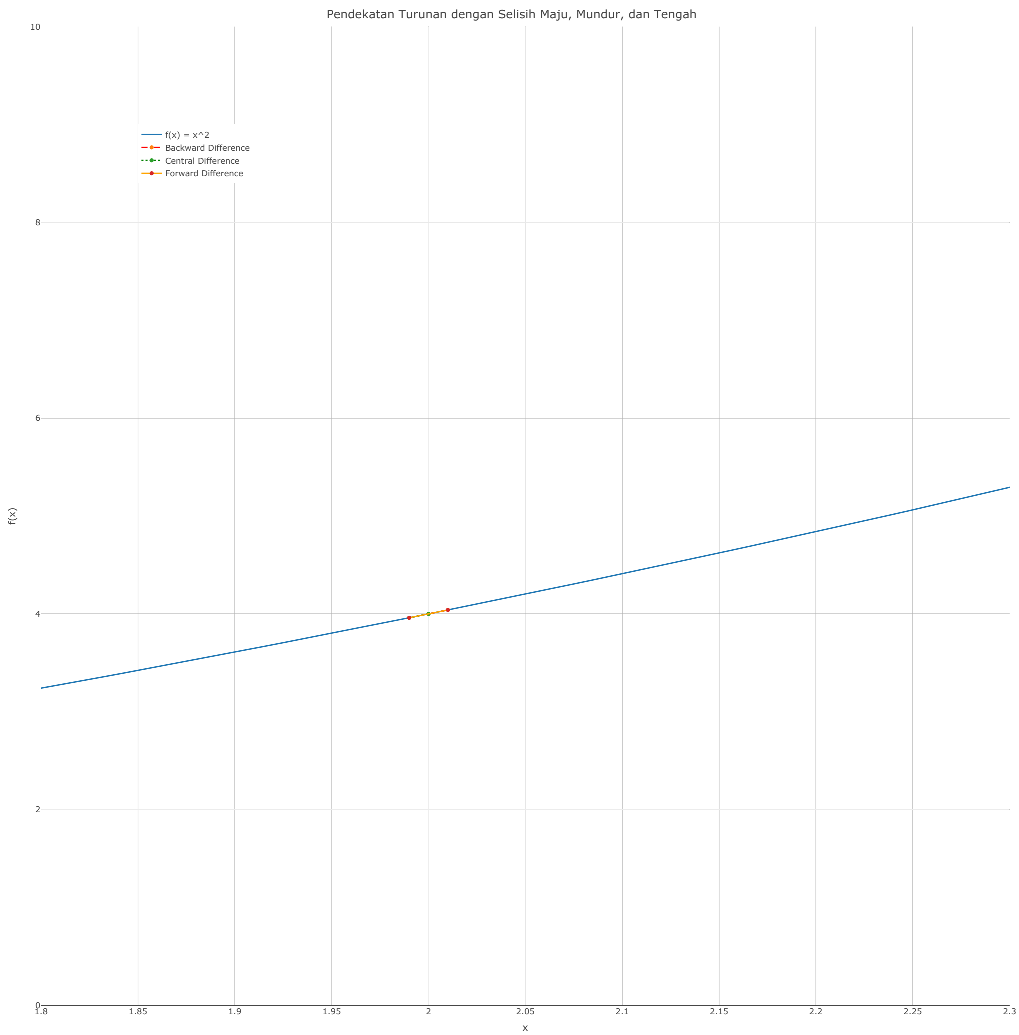
Contoh Perhitungan: Jika $f(x) = x^2$ dan ingin menghitung $f'(2)$ dengan $h = 0.01$:

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2.01) - f(1.99)}{0.02} \\ &= \frac{4.0401 - 3.9601}{0.02} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ini mendekati hasil analitik $f'(x) = 2x$, di mana $f'(2) = 4$.

```r
library(plotly)

# Fungsi yang akan diturunkan
f <- function(x) {
  x^2
}

# Metode Selisih Maju (Forward Difference)
forward_diff <- function(x, h) {
  (f(x + h) - f(x)) / h
}

# Metode Selisih Mundur (Backward Difference)
backward_diff <- function(x, h) {
  (f(x) - f(x - h)) / h
}

# Metode Selisih Tengah (Central Difference)
central_diff <- function(x, h) {
  (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)
}

# Nilai x dan h
x_val <- 2
h_val <- 0.01

# Perhitungan turunan numerik
fwd <- forward_diff(x_val, h_val)
bwd <- backward_diff(x_val, h_val)
ctr <- central_diff(x_val, h_val)

# Data untuk visualisasi
x_vals <- seq(1.5, 2.5, length.out = 100)
y_vals <- f(x_vals)

data <- data.frame(x = x_vals, y = y_vals)

# Buat plot dengan Plotly
fig <- plot_ly(data, x = ~x, y = ~y, type = 'scatter', mode = 'lines',
               name = 'f(x) = x^2') %>%
  add_trace(x = c(x_val, x_val + h_val), y = c(f(x_val), f(x_val + h_val)),
            type = 'scatter', mode = 'lines+markers',
            name = 'Backward Difference',
            line = list(color = 'red', dash = 'dash')) %>%
  add_trace(x = c(x_val - h_val, x_val), y = c(f(x_val - h_val), f(x_val)),
            type = 'scatter', mode = 'lines+markers',
            name = 'Central Difference',
            line = list(color = 'green', dash = 'dot')) %>%
  add_trace(x = c(x_val - h_val, x_val + h_val),
```

```
            y = c(f(x_val - h_val), f(x_val + h_val)),
            type = 'scatter', mode = 'lines+markers',
            name = 'Forward Difference',
            line = list(color = 'orange', dash = 'solid')) %>%
layout(title = 'Pendekatan Turunan dengan Selisih Maju, Mundur, dan Tengah',
         xaxis = list(title = 'x', range = c(1.8, 2.3)),  # Mengatur zoom out
         yaxis = list(title = 'f(x)', range = c(0, 10)),
         legend = list(x = 0.1, y = 0.9))

# Tampilkan plot
fig
```



3.3 Terapan Fungsi Turunan

Turunan dapat digunakan untuk menemukan **titik ekstrem** suatu fungsi, yaitu **titik maksimum dan titik minimum**. Titik ekstrem terjadi ketika turunan pertama bernilai nol, yaitu:

$$f'(x) = 0$$

Penyelesaian persamaan ini akan memberikan **titik kritis**, yaitu kandidat titik maksimum atau minimum. Untuk menentukan apakah titik tersebut adalah **maksimum atau minimum**, kita dapat menggunakan **turunan kedua**. Proses untuk menentukan titik ekstrem, adalah:

1. **Hitung turunan pertama** $f'(x)$.

2. **Cari titik kritis** dengan menyelesaikan $f'(x) = 0$.

3. **Gunakan uji turunan kedua** untuk menentukan jenis ekstrem:
   - Jika $f''(x) > 0$, titik kritis adalah **minimum lokal** (kurva cekung ke atas).
   - Jika $f''(x) < 0$, titik kritis adalah **maksimum lokal** (kurva cekung ke bawah).

3.3.1 Menentukan Titik Ekstrem

Misalkan diberikan fungsi:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

Langkah 1: Hitung turunan pertama

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Langkah 2: Cari titik kritis dengan menyelesaikan $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Bagi kedua sisi dengan 3:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Faktorkan:

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Jadi, **titik kritis** berada di:

$$x = 3, \quad x = -1$$

Langkah 3: Hitung turunan kedua untuk uji cekung

$$f''(x) = 6x - 6$$

Evaluasi pada titik kritis, **Untuk $x = 3$:**

$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$$

Karena positif, maka $x = 3$ **adalah minimum lokal**. Untuk $x = -1$:

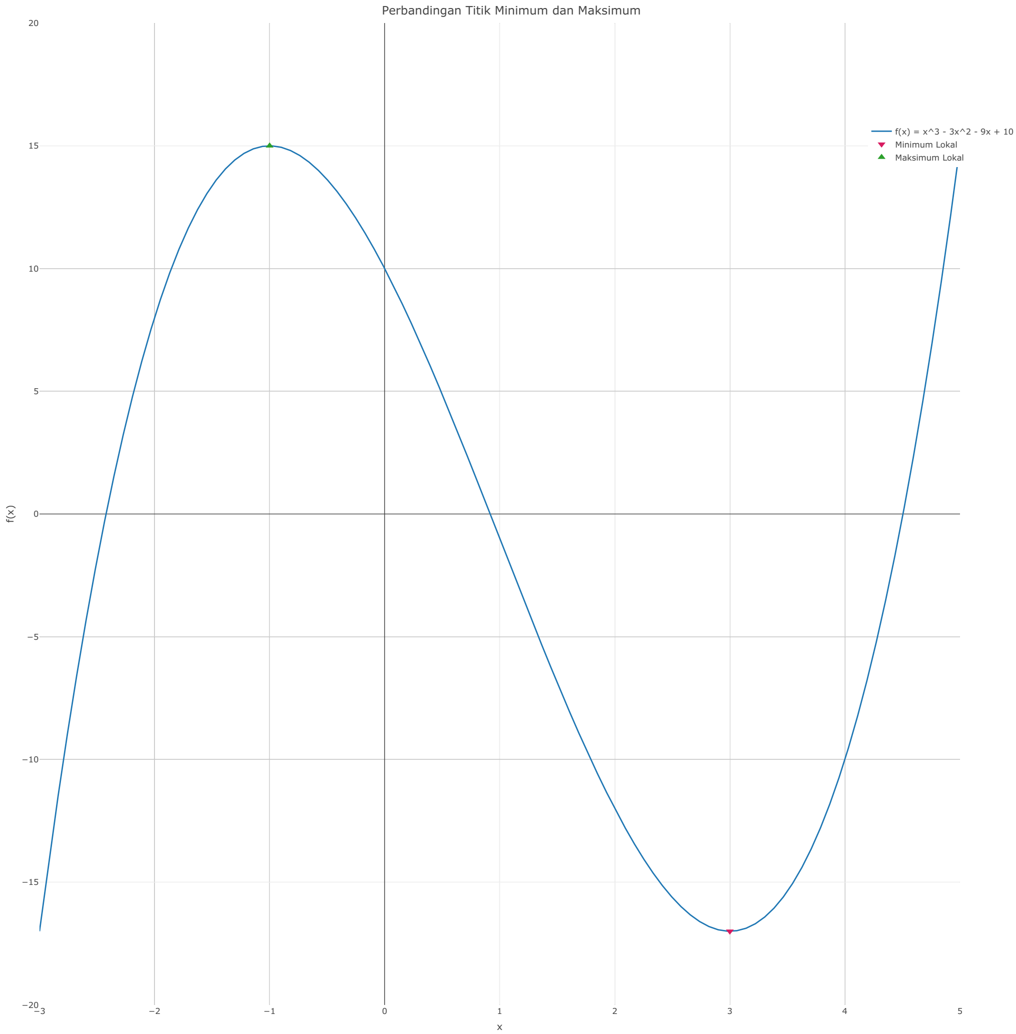
$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$$

Karena negatif, maka $x = -1$ **adalah maksimum lokal**.

Langkah 4: Hitung nilai fungsi pada titik ekstrem

$$\begin{aligned} f(3) &= (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 10 \\ &= 27 - 27 - 27 + 10 \\ &= -17 \quad \text{(minimum lokal)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 10 \\ &= -1 - 3 + 9 + 10 \\ &= 15 \quad \text{(maksimum lokal)} \end{aligned}$$



Kesimpulan:

Maksimum lokal terjadi pada $(-1, 15)$, ditandai dengan warna **merah** pada visualisasi.
Minimum lokal terjadi pada $(3, -17)$, ditandai dengan warna **hijau** pada visualisasi.

Turunan pertama digunakan untuk menemukan titik kritis, sementara turunan kedua menentukan apakah titik kritis tersebut merupakan **minimum** atau **maksimum**.

3.3.2 Turunan dalam Fisika

Dalam fisika, turunan digunakan untuk menganalisis **gerak benda**.

1. **Kecepatan** adalah turunan pertama dari posisi terhadap waktu:

$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

Kecepatan menunjukkan **seberapa cepat posisi berubah** terhadap waktu.

2. **Percepatan** adalah turunan kedua dari posisi terhadap waktu, atau turunan pertama dari kecepatan:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t)$$

Percepatan menunjukkan **seberapa cepat kecepatan berubah** terhadap waktu.

Misalkan posisi suatu benda dinyatakan dengan fungsi:

$$s(t) = 5t^2$$

Langkah 1: Hitung kecepatan $v(t)$

Kecepatan diperoleh dengan menurunkan $s(t)$ terhadap t:

$$v(t) = \frac{d}{dt}(5t^2) = 10t$$

Langkah 2: Hitung percepatan $a(t)$

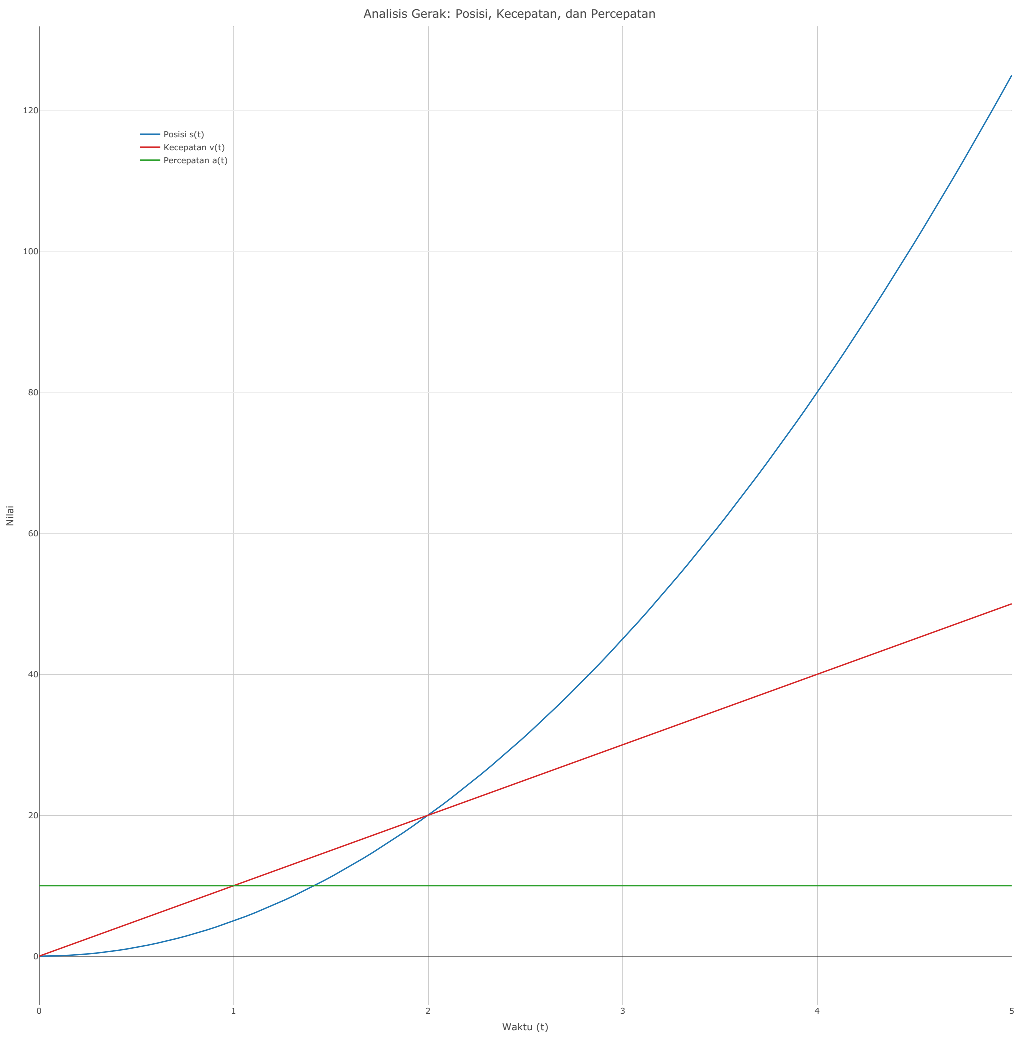
Percepatan diperoleh dengan menurunkan $v(t)$ terhadap t:

$$a(t) = \frac{d}{dt}(10t) = 10$$

Fungsi posisi: $s(t) = 5t^2$ menunjukkan bahwa benda mengalami **percepatan konstan**. Kecepatan: $v(t) = 10t$ menunjukkan bahwa **kecepatan bertambah seiring waktu**. Percepatan: $a(t) = 10$ menunjukkan bahwa **percepatan tetap konstan**.

```
library(plotly)

# Definisi fungsi
s <- function(t) { 5*t^2 }
v <- function(t) { 10*t }
a <- function(t) { 10 }

# Rentang waktu
t_vals <- seq(0, 5, length.out = 100)
s_vals <- s(t_vals)
v_vals <- v(t_vals)
a_vals <- rep(a(0), length(t_vals))  # Percepatan konstan

# Buat data frame
data <- data.frame(t = t_vals, s = s_vals, v = v_vals, a = a_vals)

# Plot menggunakan Plotly
fig <- plot_ly() %>%
  add_trace(data = data, x = ~t, y = ~s, type = 'scatter', mode = 'lines',
            name = 'Posisi s(t)', line = list(color = '#1f77b4')) %>%
  add_trace(data = data, x = ~t, y = ~v, type = 'scatter', mode = 'lines',
```

```
            name = 'Kecepatan v(t)', line = list(color = '#d62728')) %>%
  add_trace(data = data, x = ~t, y = ~a, type = 'scatter', mode = 'lines',
            name = 'Percepatan a(t)', line = list(color = '#2ca02c')) %>%
  layout(title = 'Analisis Gerak: Posisi, Kecepatan, dan Percepatan',
         xaxis = list(title = 'Waktu (t)'),
         yaxis = list(title = 'Nilai'),
         legend = list(x = 0.1, y = 0.9))

# Tampilkan plot
fig
```



Kesimpulan:

Turunan pertama dari posisi memberikan **kecepatan**.
Turunan kedua dari posisi memberikan **percepatan**.
Jika percepatan **konstan**, gerak disebut **gerak lurus berubah beraturan (GLBB)**.

Dengan konsep ini, kita bisa memahami gerak benda dalam berbagai situasi fisika!

Dalam pembelajaran matematika teknik, estimasi fungsi memiliki peran penting dalam mendekati nilai suatu fungsi yang tidak diketahui secara langsung. Turunan analitik memberikan hasil yang eksak dan dapat digunakan untuk menganalisis perubahan suatu fungsi dengan presisi tinggi, sementara metode turunan numerik menjadi alternatif yang efektif ketika perhitungan analitik sulit dilakukan. Konsep turunan ini memiliki berbagai aplikasi yang luas, terutama dalam optimasi, fisika, dan pembelajaran mesin, di mana analisis perubahan dan pencarian nilai ekstrem sangat diperlukan. Oleh karena itu, pemahaman mendalam mengenai estimasi fungsi dan turunan, baik secara analitik maupun numerik, menjadi suatu keharusan dalam berbagai bidang keilmuan, khususnya teknik pertambangan.

Chapter 4

Deret Taylor

Deret Taylor adalah metode untuk **mendekati fungsi** dengan ekspansi deret berdasarkan turunan fungsi tersebut di sekitar titik tertentu.

Jika suatu fungsi $f(x)$ memiliki turunan hingga orde tinggi di sekitar $x = a$, maka kita dapat menuliskan ekspansi Taylor sebagai:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Semakin banyak suku yang digunakan, semakin **mendekati** nilai fungsi aslinya.

4.1 Deret Taylor untuk e^x

Misalkan kita ingin mendekati fungsi **eksponensial** e^x dengan ekspansi Taylor di sekitar $x = 0$.

Turunan-turunan fungsi e^x adalah:

$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$f''(x) = e^x$
$f'''(x) = e^x$
$\cdots$ (dan seterusnya, karena turunan e^x selalu sama)

Pada $x = 0$, semua turunan bernilai **1**, sehingga ekspansi Taylor menjadi:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

4.2 Perhitungan Perkiraan $e^{0.1}$

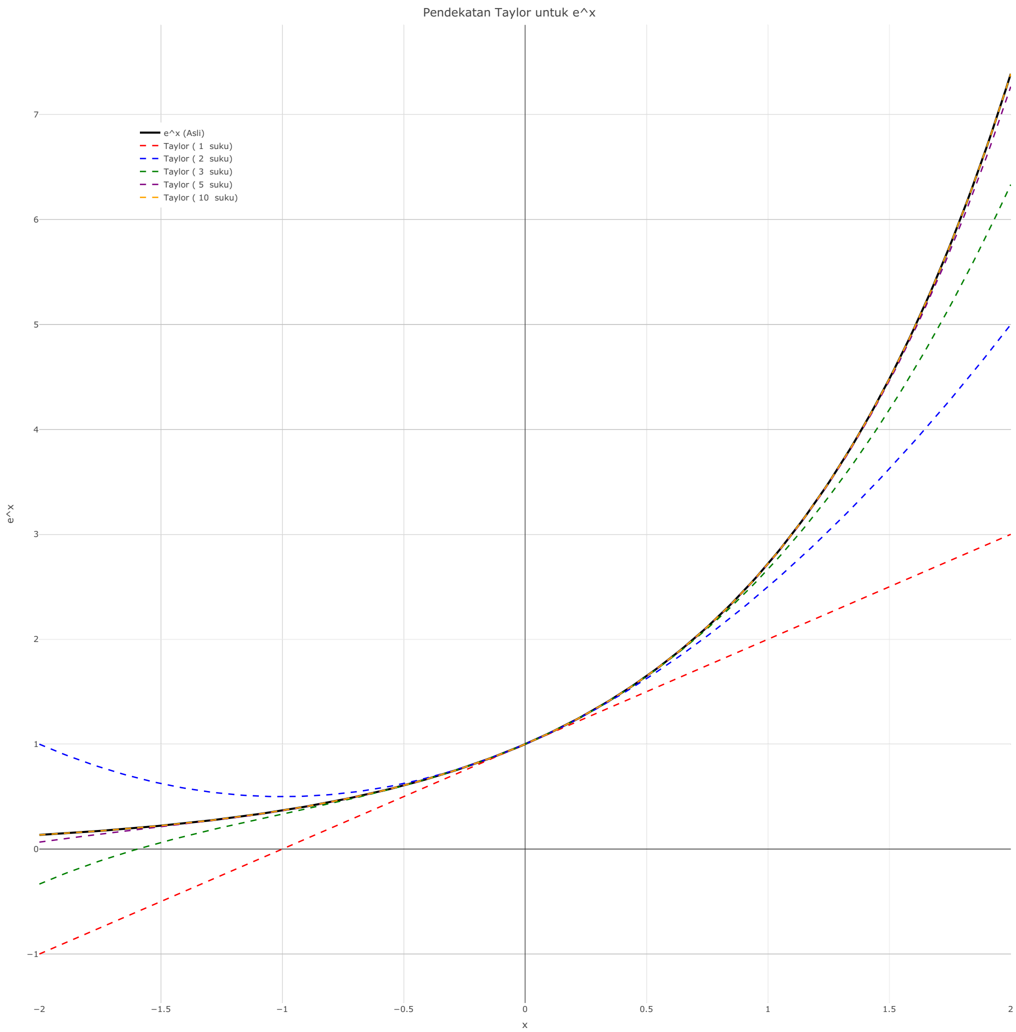
Kita bisa menghitung nilai $e^{0.1}$ dengan hanya mengambil **beberapa suku pertama**:

$$
\begin{aligned}
e^{0.1} &\approx 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^4}{4!} \\
&= 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} + \frac{0.0001}{24} \\
&= 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0001667 + 0.000004167 \\
&\approx 1.10517
\end{aligned}
$$

Bandingkan dengan nilai asli dari kalkulator:

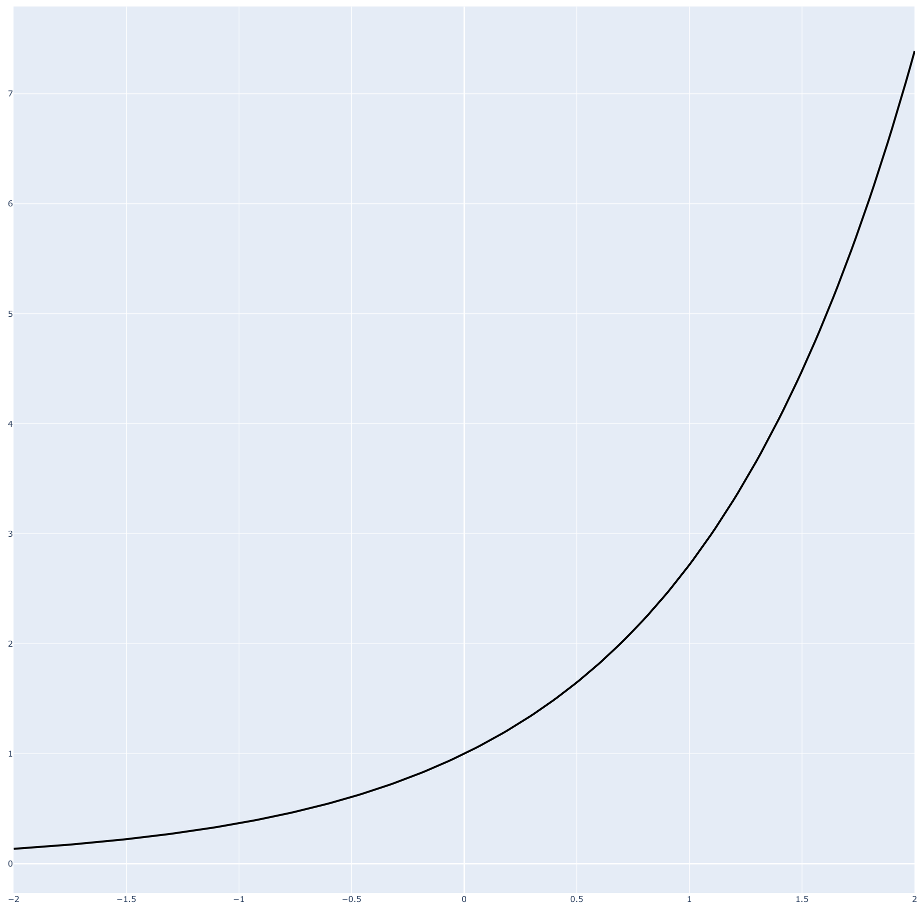
$$e^{0.1} \approx 1.105170918$$

Hasil ini cukup akurat meskipun kita hanya mengambil **5 suku pertama**.



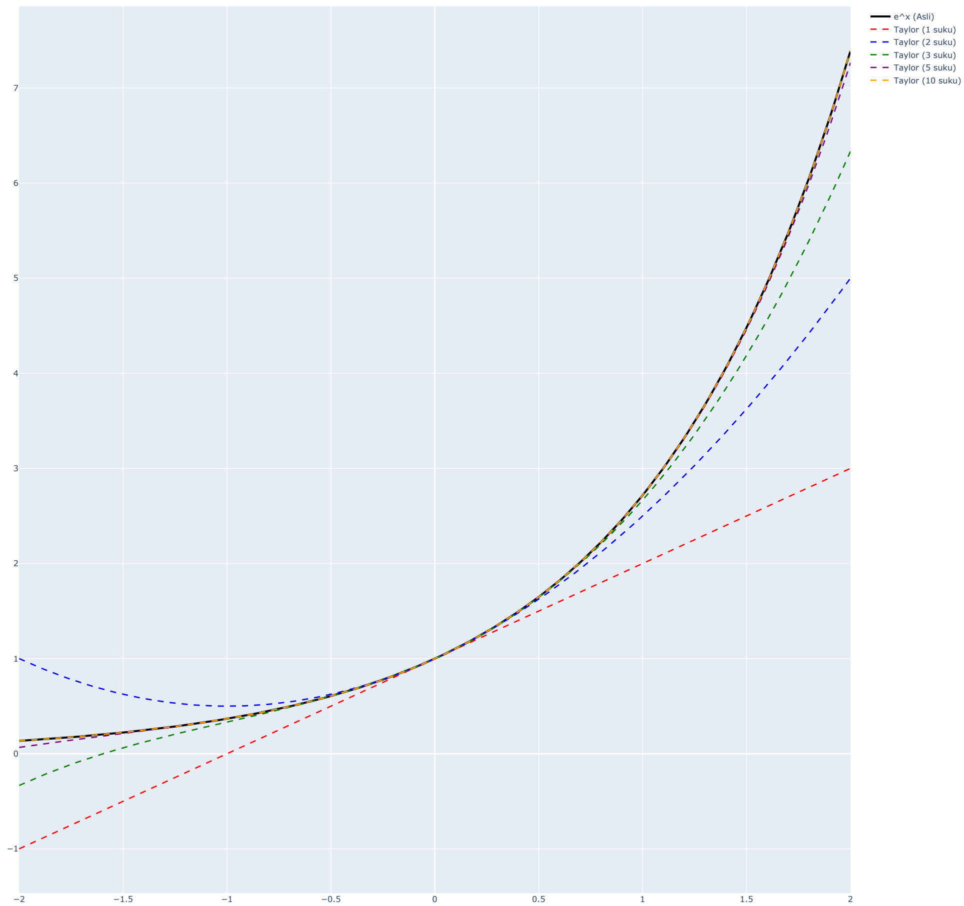
Berikut ini adalah proses perhitungan dan visualisasinya dengan menggunakan bantuan Pemrograman Python.

```
import numpy as np
import plotly.graph_objs as go
from math import factorial

# Fungsi eksponensial asli
def e_x(x):
    return np.exp(x)

# Fungsi Taylor series hingga derajat n
def taylor_series(x, n):
    return np.array([
        sum((x_val**k) / factorial(k) for k in range(n + 1))
        for x_val in x
    ])

# Rentang x untuk plot
x_vals = np.linspace(-2, 2, 200)
y_actual = e_x(x_vals)

# Buat plot dengan Plotly
fig = go.Figure()

# Garis fungsi asli e^x
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=x_vals, y=y_actual, mode='lines',
    name='e^x (Asli)', line=dict(color='black', width=3)
))
```



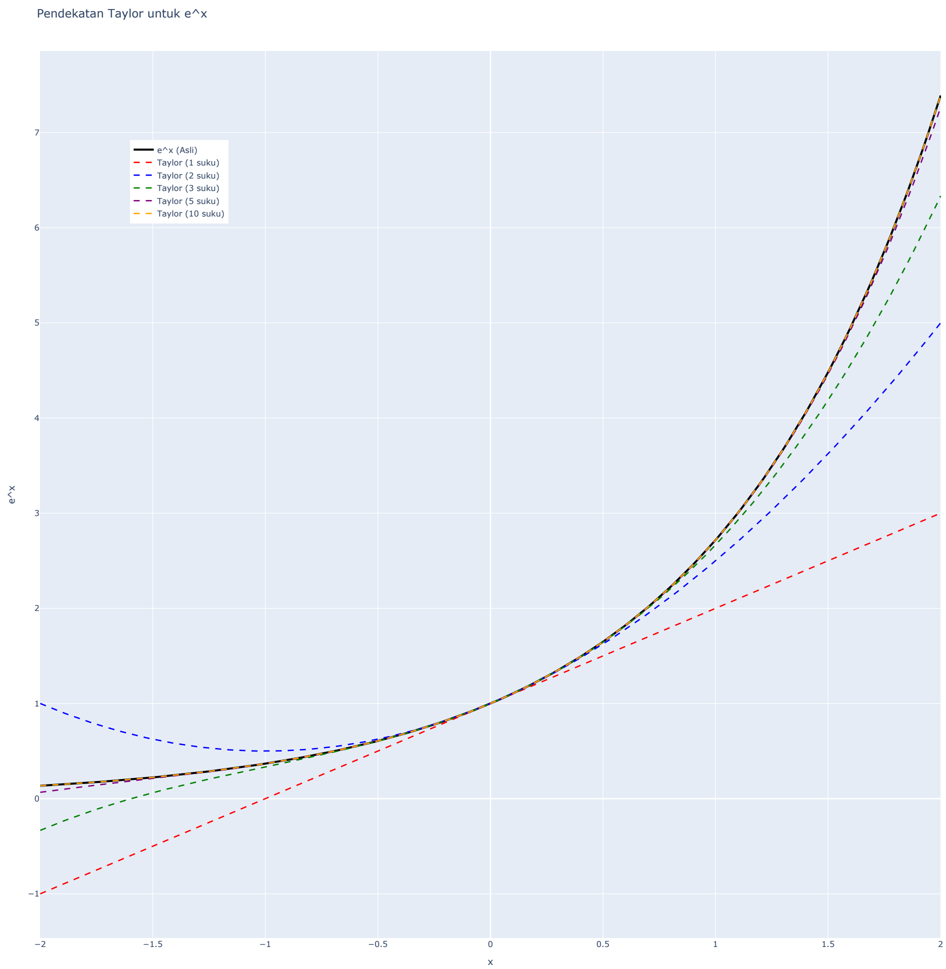
Loading [MathJax]/extensions/MathMenu.js

```
# Tambahkan pendekatan Taylor dengan berbagai jumlah suku
colors = ["red", "blue", "green", "purple", "orange"]
n_terms = [1, 2, 3, 5, 10]  # Jumlah suku Taylor yang digunakan

for i, n in enumerate(n_terms):
    y_taylor = taylor_series(x_vals, n)
    fig.add_trace(go.Scatter(
        x=x_vals, y=y_taylor, mode='lines',
        name=f'Taylor ({n} suku)',
        line=dict(color=colors[i], dash='dash')
    ))
```



Loading [MathJax]/extensions/MathMenu.js

```
# Layout plot
fig.update_layout(
    title='Pendekatan Taylor untuk e^x',
    xaxis_title='x',
    yaxis_title='e^x',
    legend=dict(x=0.1, y=0.9)
)
```



Loading [MathJax]/extensions/MathMenu.js

4.3 Prediksi Deret Taylor

Fungsi deformasi tanah dalam tambang mengikuti persamaan:

$$u(t) = e^{-0.2t}\sin(2t)$$

dengan t dalam hari, dan $u(t)$ dalam meter.
Kita ingin **memprediksi deformasi tanah pada** $t = 6$ menggunakan **deret Taylor di sekitar** $t = 5$.

4.3.1 Rumus Deret Taylor

Deret Taylor di sekitar $t = 5$:

$$u(t) \approx u(5) + u'(5)(t-5) + \frac{u''(5)}{2!}(t-5)^2 + \frac{u'''(5)}{3!}(t-5)^3$$

- $u(5)$ = nilai fungsi pada $t = 5$
- $u'(t)$ = turunan pertama dari $u(t)$
- $u''(t)$ = turunan kedua dari $u(t)$
- $u'''(t)$ = turunan ketiga dari $u(t)$

Kita akan menghitung **turunan fungsi hingga orde ke-3**, mengevaluasi di $t = 5$, lalu menggunakan deret Taylor untuk menghitung $u(6)$.

4.3.2 Hitung Turunan $u(t)$

4.3.2.1 Nilai fungsi $t = 5$

$$u(5) = e^{-1} \cdot \sin(10) \approx 0.3679 \cdot (-0.5440) = 0.1353$$

4.3.2.2 Turunan pertama:

$$u'(t) = e^{-0.2t}(2\cos(2t) - 0.2\sin(2t))$$
$$u'(5) = e^{-1}(2\cos(10) - 0.2\sin(10)) \approx 0.3679 \cdot (-1.5694) = -0.1501$$

4.3.2.3 Turunan kedua:

$$u''(t) = e^{-0.2t}(-3.96\sin(2t) - 0.8\cos(2t))$$
$$u''(5) = e^{-1}(-3.96\sin(10) - 0.8\cos(10)) \approx -0.0824$$

4.3.2.4 Turunan ketiga:

$$u'''(t) = e^{-0.2t}(-7.76\cos(2t) + 2.39\sin(2t))$$
$$u'''(5) = e^{-1}(-7.76\cos(10) + 2.39\sin(10)) \approx 0.1102$$

4.3.3 Aproksimasi $u(6)$

Substitusi nilai turunan ke dalam deret Taylor:

$$u(6) \approx 0.1353 + (-0.1501)(1) + \frac{-0.0824}{2}(1)^2 + \frac{0.1102}{6}(1)^3$$

$$u(6) \approx 0.1353 - 0.1501 - 0.0412 + 0.0184 = -0.0376$$

4.3.4 Nilai Sebenarnya

$$u(6) = e^{-1.2} \cdot \sin(12) \approx 0.3012 \cdot (-0.1279) = -0.0385$$

4.3.5 Kesimpulan

Nilai	Hasil
Aproksimasi	-0.0376
Nilai Sebenarnya	-0.0385
Error	0.0009 **meter (0.9 mm)**

Aproksimasi sangat akurat, hanya selisih 0.9 mm dengan nilai aslinya.

4.4 Analogi Deret Taylor

Bayangkan kamu **berdiri di sebuah titik jalan** (anggap ini sebagai titik $x = a$ pada grafik fungsi). Misalnya kamu sedang jalan kaki di sebuah bukit, dan kamu **tidak punya peta lengkap**, tapi kamu tahu:

1. **Di mana posisi kamu sekarang**
   → Ini seperti **nilai fungsi** di titik itu:

   $$f(a)$$

2. **Arah jalan saat ini (menanjak atau menurun)**
   → Ini seperti **turunan pertama**:

   $$f'(a)$$

   Semakin besar $f'(a)$, makin curam naiknya. Kalau negatif, berarti turun.

3. **Apakah jalan akan berbelok tajam atau tidak**
   → Ini seperti **turunan kedua**:

   $$f''(a)$$

   Kalau positif, jalan makin menanjak. Kalau negatif, jalan mulai melandai atau menurun.

4. **Bagaimana perubahan belokan itu sendiri**
   → Ini turunan ketiga, keempat, dst.
   Semakin banyak turunan yang kamu tahu, semakin akurat prediksi kamu.

Chapter 5

Integral

5.1 Definisi Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah kebalikan dari operasi **turunan** dalam kalkulus. Jika kita punya suatu **fungsi**, integral tak tentu mencari **fungsi asal** yang, ketika diturunkan, akan menghasilkan fungsi tersebut.

Misalnya, jika kita memiliki suatu **kecepatan** suatu objek yang bergerak, integral dari kecepatan tersebut akan memberi kita **posisi** objek tersebut setelah bergerak dalam waktu tertentu. Dengan kata lain, integral membantu kita "mencari fungsi yang hilang."

Integral tak tentu dari suatu fungsi $f(x)$ ditulis seperti ini:

$$\int f(x)\,dx$$

Simbol $\int$ ini adalah simbol integral, yang berarti kita akan mencari fungsi yang hasil turunannya adalah $f(x)$. dx menunjukkan variabel yang digunakan (dalam hal ini x), dan hasilnya adalah fungsi **primitif** $F(x)$, yang ditambah dengan **konstanta integrasi** C.

Jadi, secara umum, kita menulis:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- $F(x)$ adalah fungsi primitif (fungsi yang diturunkan untuk menghasilkan $f(x)$).
- C adalah **konstanta integrasi** (karena ada banyak fungsi yang diturunkan menjadi $f(x)$ yang berbeda hanya pada nilai konstanta).

Setiap kali kita mengambil turunan dari sebuah fungsi, nilai konstanta tidak akan terlihat. Misalnya, turunan dari $x^2 + 3$ dan $x^2 + 5$ adalah sama, yaitu $2x$. Karena itu, saat kita mengintegral, kita harus menambahkan konstanta C untuk menyatakan bahwa ada banyak fungsi primitif yang mungkin (berbeda hanya pada nilai konstanta).

Contoh Integral Tak Tentu 1:

Jika kita ingin mencari integral dari fungsi $f(x) = 2x$, kita mencari fungsi yang turunan dari fungsi tersebut menghasilkan $2x$. Fungsi tersebut adalah x^2. Maka:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Di sini, kita menambahkan C karena ada banyak fungsi yang memiliki turunan $2x$, seperti $x^2 + 3$, $x^2 + 5$, dan seterusnya.

Contoh Integral Tak Tentu 2:

Jika kita ingin mencari integral dari $f(x) = 3$, yang berarti fungsi konstan. Fungsi yang jika diturunkan menghasilkan 3 adalah $3x$. Maka:

$$\int 3\,dx = 3x + C$$

Integral tak tentu adalah cara untuk menemukan fungsi asal dari suatu fungsi yang sudah diketahui. Ini membantu kita memahami perubahan dari suatu fenomena (misalnya, perubahan posisi atau jumlah) dari waktu ke waktu. Konstanta C menunjukkan bahwa ada banyak solusi untuk integral yang sama, hanya berbeda pada nilai konstan.

5.2 Definisi Integral Tentu

Integral tentu adalah jumlah luas kurva dari $f(x)$ di antara batas a hingga b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

di mana $F(x)$ adalah **antiturunan** dari $f(x)$, yaitu fungsi yang apabila diturunkan akan menghasilkan $f(x)$.

Contoh:

Misalnya kita ingin menghitung integral dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 2]$:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Langkah-langkah perhitungannya:

1. Temukan antiturunan dari x^2, yaitu $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
2. Evaluasi antiturunan pada batas atas ($x = 2$) dan batas bawah ($x = 0$):
   - $F(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 = \frac{8}{3}$
   - $F(0) = \frac{1}{3} \times 0^3 = 0$
3. Hitung selisihnya: $\frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$.

Hasilnya adalah $\frac{8}{3}$, yang menunjukkan luas area di bawah kurva x^2 dari $x = 0$ hingga $x = 2$.

Integral tentu sering digunakan untuk menghitung:

- **Luas area** di bawah suatu kurva antara dua batas tertentu.
- **Total jarak** yang ditempuh oleh objek dengan kecepatan yang berubah-ubah.
- **Total biaya** atau total pendapatan dalam konteks ekonomi atau bisnis.

5.3 Aturan Dasar Integrasi

5.3.1 Integral Fungsi-Fungsi Dasar

Integral merupakan proses kebalikan dari turunan. Integral tak tentu menghasilkan fungsi asal (primitif) dari suatu turunan, sedangkan integral tentu menghitung luas di bawah kurva antara dua titik.

Berikut adalah beberapa fungsi dasar dan integralnya yang sangat sering digunakan dalam Matematika Teknik:

Fungsi	Integral
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

5.3.2 Metode Substitusi

Metode substitusi digunakan untuk menyederhanakan bentuk integral dengan mengganti bagian dari fungsi menjadi variabel baru u. Ini sangat berguna ketika fungsi yang diintegralkan adalah komposisi dari dua fungsi.

Jika $u = g(x)$, maka:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Langkah-langkah:

1. Tentukan substitusi: $u = g(x)$
2. Hitung turunan $du = g'(x)\, dx$
3. Ganti semua x dan dx menjadi fungsi u dan du
4. Hitung integral dalam variabel u
5. Kembalikan ke variabel x

Contoh Soal

Hitung:

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx$$

Langkah-langkah:

1. Substitusi:
   - $u = x^2$
   - $du = 2x\,dx$
2. Ganti ke bentuk u:
   - $\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(u)\,du$
3. Hitung integral:
   - $\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C$
4. Kembalikan ke variabel x:
   - $\sin(x^2) + C$

Jadi:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2) + C$$

Catatan:

- Metode substitusi sangat berguna dalam integral fungsi komposit.
- Jika Anda melihat suatu fungsi dan turunannya dalam bentuk integral, metode substitusi biasanya dapat digunakan.
- Metode ini adalah dasar dari **integrasi dengan perubahan variabel** dan penting dalam kalkulus teknik dan fisika.

5.3.3 Metode Integrasi Parsial

Integrasi parsial digunakan ketika fungsi yang diintegralkan merupakan hasil kali dari dua fungsi yang berbeda. Metode ini berdasarkan pada aturan turunan dari hasil kali dua fungsi.

Jika $u = f(x)$ dan $dv = g(x)\,dx$, maka:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Langkah-langkah:

1. **Tentukan**: mana fungsi yang akan dijadikan u dan mana yang dv.
2. **Hitung**: turunan du dan integral v.
3. **Substitusikan** ke rumus: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
4. **Selesaikan** integral sisanya.

Gunakan panduan **LIATE** untuk memilih u:

- **L**: Logaritma (mis. $\ln x$)
- **I**: Invers trigonometri (mis. $\tan^{-1} x$)
- **A**: Aljabar (mis. x, x^2)
- **T**: Trigonometri (mis. $\sin x$, $\cos x$)
- **E**: Eksponensial (mis. e^x)

Contoh Soal:

Hitung:

$$\int xe^x \, dx$$

Langkah-langkah:

1. Pilih:
   - $u = x \Rightarrow du = dx$
   - $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$
2. Gunakan rumus:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$$

3. Selesaikan:

$$= xe^x - e^x + C$$

Catatan:

- Integrasi parsial sangat berguna untuk fungsi seperti:
  - $x \cdot e^x$
  - $x \cdot \ln x$
  - $x \cdot \sin x$
- Kadang proses harus diulang lebih dari satu kali, terutama jika fungsi u masih berisi variabel setelah integrasi pertama.

5.4 Penerapan Integrasi

5.4.1 Volume Benda Putar

Volume benda putar adalah volume yang terbentuk ketika suatu kurva atau daerah bidang diputar mengelilingi suatu sumbu. Ada beberapa metode utama untuk menghitungnya, yaitu:

5.4.1.1 Metode Cakram

Metode Cakram (Disk Method) digunakan ketika daerah diputar **mengelilingi sumbu horizontal** (misal: sumbu-x), dan **tidak berlubang** di tengah.

Rumus:

Jika daerah di antara $y = f(x)$, $x = a$, dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu-x:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Contoh Soal:

Menghitung volume lapisan batuan menggunakan Metode Cakram dengan profil $y = \sqrt{x}$, dari $x = 0$ sampai $x = 4$:

$$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi$$

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Nilai x dan fungsi y = sqrt(x)
x = np.linspace(0, 4, 100)
y = np.sqrt(x)

# Buat permukaan revolusi (volume benda putar)
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
X, T = np.meshgrid(x, theta)
Y = np.sqrt(X)
Z = Y * np.cos(T)
W = Y * np.sin(T)

# Buat plot 3D
fig = go.Figure(data=[go.Surface(x=X, y=Z, z=W, colorscale='Viridis', opacity=0.9)])

# Layout
fig.update_layout(
    title='Volume Rotasi y = √x dari x = 0 ke x = 4 (Metode Cakram)',
    scene=dict(
        xaxis_title='x',
        yaxis_title='y (putaran)',
        zaxis_title='z'
    )
)
```

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

5.4.1.2 Metode Cincin

Metode Cincin (Washer Method) digunakan ketika daerah yang diputar memiliki **lubang di tengah**, yaitu antara dua kurva, dan diputar terhadap sumbu horizontal seperti sumbu-x.

Rumus:

Jika daerah antara $y = f(x)$ (kurva atas) dan $y = g(x)$ (kurva bawah) diputar terhadap sumbu-x:

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

Contoh Soal:

Hitung volume benda yang dibentuk dari pemutaran daerah antara $y = \sqrt{x}$ dan $y = \frac{x}{2}$ dari $x = 0$ sampai $x = 4$ terhadap sumbu-x menggunakan **Metode Cincin**.

$$V = \pi \int_0^4 \left((\sqrt{x})^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right) dx = \pi \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{12} \right) = \pi \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{8\pi}{3}$$

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Nilai x dan dua fungsi: y_outer = sqrt(x), y_inner = x/2
x = np.linspace(0, 4, 100)
y_outer = np.sqrt(x)
y_inner = x / 2

# Variabel rotasi
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
X, T = np.meshgrid(x, theta)

# Fungsi luar
Y_outer = np.sqrt(X)
Z_outer = Y_outer * np.cos(T)
W_outer = Y_outer * np.sin(T)

# Fungsi dalam
Y_inner = X / 2
Z_inner = Y_inner * np.cos(T)
W_inner = Y_inner * np.sin(T)

# Plot 3D permukaan luar dan dalam (lubang)
fig = go.Figure()

# Permukaan luar
fig.add_trace(go.Surface(x=X, y=Z_outer, z=W_outer, colorscale='Blues', opacity=0.8, showscal

# Permukaan dalam (lubang)
fig.add_trace(go.Surface(x=X, y=Z_inner, z=W_inner, colorscale='Reds', opacity=0.8, showscale

# Layout
fig.update_layout(
    title='Volume Rotasi antara y = √x dan y = x/2 (Metode Cincin)',
    scene=dict(
        xaxis_title='x',
        yaxis_title='putaran-y',
        zaxis_title='putaran-z'
```

```
    ),
    showlegend=False
)

fig.show()
```

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

5.4.1.3 Metode Kulit Silinder

Metode Kulit Silinder (Shell Method) digunakan untuk menghitung volume benda yang diputar **mengelilingi sumbu vertikal** (misalnya: sumbu-y), terutama ketika memutar fungsi dalam bentuk x terhadap sumbu-y lebih mudah dibanding metode cakram/cincin.

Rumus:

Jika fungsi $y = f(x)$ diputar terhadap sumbu-y dari $x = a$ ke $x = b$, maka:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Contoh Soal:

Hitung volume benda yang dibentuk dari pemutaran daerah di bawah $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ hingga $x = 4$ terhadap sumbu-y menggunakan **Metode Kulit Silinder**.

$$V = 2\pi \int_0^4 x \cdot \sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\, dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2}\right]_0^4 = 2\pi \cdot \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{128\pi}{5}$$

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# x dan y = sqrt(x)
x = np.linspace(0, 4, 100)
y = np.sqrt(x)

# Variabel rotasi (theta)
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
X, T = np.meshgrid(x, theta)

# f(x) = sqrt(x), digunakan untuk menghitung permukaan silinder
Y = X * np.cos(T)  # sumbu-y (melingkar)
Z = X * np.sin(T)  # sumbu-z (melingkar)
H = np.sqrt(X)     # tinggi silinder

# Plot 3D permukaan silinder
fig = go.Figure()
```

```
fig.add_trace(go.Surface(
    x=X, y=Y, z=H, surfacecolor=H, colorscale='Viridis',
    showscale=False, opacity=0.9, name='Shell Surface'
))

# Layout
fig.update_layout(
    title='Volume Rotasi y = √x dari x = 0 ke x = 4 (Metode Kulit Silinder)',
    scene=dict(
        xaxis_title='x (tinggi kulit)',
        yaxis_title='putaran-y',
        zaxis_title='z'
    ),
    showlegend=False
)
```

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

5.4.2 Volume Kontur Penampang

Menghitung volume material antara dua penampang dapat dilakukan menggunakan beberapa pendekatan geometrik dan numerik. Berikut beberapa metode yang umum digunakan:

5.4.2.1 Metode Rata-Rata Penampang

Metode Rata-Rata Penampang (Average-End Area Method) digunakan untuk memperkirakan volume material antara dua penampang.

Rumus:

$$V = \frac{1}{2}h(A_1 + A_2)$$

Keterangan:

- h : jarak vertikal antara dua penampang
- A_1, A_2 : luas penampang bawah dan atas

Diberikan fungsi luas penampang:

- Penampang bawah:

$$A_1(x) = 150 + 20\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 5e^{-0.1x}$$

- Penampang atas:

$$A_2(x) = 180 + 15\cos\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 8\ln(x+1)$$

Jika diketahui:

- Interval x dari 0 hingga 10 satuan,
- Jarak antar penampang $h = 5$ satuan,

Hitung volume material menggunakan Metode Rata-Rata Penampang.

Langkah-langkah Penyelesaian

1. Hitung A_1 pada $x = 0$ dan $x = 10$.
2. Hitung A_2 pada $x = 0$ dan $x = 10$.
3. Terapkan rumus rata-rata penampang untuk menghitung volume.

Langkah 1: Hitung nilai area pada $x = 0$:

- $A_1(0) = 150 + 20\sin(0) + 5e^0 = 150 + 0 + 5 = 155$
- $A_2(0) = 180 + 15\cos(0) + 8\ln(1) = 180 + 15 + 0 = 195$

Langkah 2: Hitung nilai area pada $x = 10$:

- $\sin\left(\frac{\pi\times 10}{5}\right) = \sin(2\pi) = 0$
- $\cos\left(\frac{\pi\times 10}{5}\right) = \cos(2\pi) = 1$
- $e^{-1} \approx 0.3679$
- $\ln(11) \approx 2.3979$

Sehingga:

- $A_1(10) = 150 + 20(0) + 5(0.3679) = 150 + 1.8395 = 151.8395$
- $A_2(10) = 180 + 15(1) + 8(2.3979) = 180 + 15 + 19.1832 = 214.1832$

Langkah 3: Rata-rata area:

- $A_{1,\text{rata}} = \frac{155+151.8395}{2} = 153.41975$
- $A_{2,\text{rata}} = \frac{195+214.1832}{2} = 204.5916$

Langkah 4: Hitung volume:

$$V = \frac{1}{2} \times 5 \times (153.41975 + 204.5916)$$

$$V = \frac{5}{2} \times 358.01135$$

$$V = 2.5 \times 358.01135$$

$$V \approx 895.0284 \text{ satuan volume}$$

Volume material ≈ 895.03 **satuan volume.**

Visualisasi 3D Fungsi Area

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Fungsi untuk penampang bawah dan atas
def A1(x):
```

```
    return 150 + 20 * np.sin(np.pi * x / 5) + 5 * np.exp(-0.1 * x)

def A2(x):
    return 180 + 15 * np.cos(np.pi * x / 5) + 8 * np.log(x + 1)

# Grid x dan y
x = np.linspace(0, 10, 100)
y = np.linspace(0, 5, 10)  # Jarak vertikal untuk memberi kedalaman
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Hitung Z untuk penampang bawah dan atas
Z1 = A1(X)
Z2 = A2(X)

# Buat plot 3D
fig = go.Figure()

# Tambahkan penampang bawah
fig.add_trace(go.Surface(z=Z1, x=X, y=Y, colorscale='Viridis', name='Penampang Bawah', opacit

# Tambahkan penampang atas
fig.add_trace(go.Surface(z=Z2, x=X, y=Y, colorscale='Cividis', name='Penampang Atas', opacity

# Layout
fig.update_layout(
    title='Visualisasi Volume Cadangan Tambang antara Dua Penampang',
    scene=dict(
        xaxis_title='Jarak Horizontal (m)',
        yaxis_title='Kedalaman / Interval Vertikal (m)',
        zaxis_title='Luas Penampang (m²)'
    ),
    margin=dict(l=0, r=0, b=0, t=50)
)

fig.show()
```

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

5.4.2.2 Metode Prismoid

Metode **Prismoid** digunakan untuk menghitung volume material antara dua penampang dengan mempertimbangkan penampang tengah. Rumus Prismoid adalah sebagai berikut:

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_m + A_2)$$

Keterangan:

- h: Jarak antara dua penampang
- A_1: Luas penampang bawah (di $x = 0$)
- A_2: Luas penampang atas (di $x = 10$)
- A_m: Luas penampang tengah (di $x = 5$)

Diketahui: Fungsi luas penampang bawah dan atas:

- Penampang bawah:

$$A_1(x) = 150 + 20\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 5e^{-0.1x}$$

- Penampang atas:

$$A_2(x) = 180 + 15\cos\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 8\ln(x+1)$$

Dengan:

- $x \in [0, 10]$
- $h = 10$

Langkah Penyelesaian:

Langkah 1, hitung $A_1(0)$

$$A_1(0) = 150 + 20\sin(0) + 5e^0 = 150 + 0 + 5 = \boxed{155}$$

Langkah 2, hitung $A_2(10)$

$$\cos\left(\frac{\pi \cdot 10}{5}\right) = \cos(2\pi) = 1 \ln(11) \approx 2.3979$$

$$A_2(10) = 180 + 15(1) + 8(2.3979) = 180 + 15 + 19.1832 = \boxed{214.1832}$$

Langkah 3, hitung $A_m(5)$

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{5}\right) = \sin(\pi) = 0 \cos\left(\frac{\pi \cdot 5}{5}\right) = \cos(\pi) = -1 \ln(6) \approx 1.7918$$

$$A_1(5) = 150 + 0 + 5e^{-0.5} \approx 150 + 0 + 5(0.6065) = 153.0325$$

$$A_2(5) = 180 + 15(-1) + 8(1.7918) = 180 - 15 + 14.3344 = 179.3344$$

$$A_m = \frac{A_1(5) + A_2(5)}{2} = \frac{153.0325 + 179.3344}{2} = \boxed{166.1834}$$

Hitung Volume

$$V = \frac{10}{6}(153.0325 + 4 \cdot 166.1834 + 179.3344)$$

$$V = \frac{10}{6} \cdot (155 + 664.7336 + 179.3344) = \frac{10}{6} \cdot 1033.9168$$

$$V \approx 1723.1947 \text{ satuan volume}$$

Volume Material

$$\boxed{V \approx 1723.19 \text{ satuan volume}}$$

Visualisasi 3D Penampang

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Fungsi penampang bawah dan atas
def A1(x):
    return 150 + 20 * np.sin(np.pi * x / 5) + 5 * np.exp(-0.1 * x)

def A2(x):
    return 180 + 15 * np.cos(np.pi * x / 5) + 8 * np.log(x + 1)

# Grid x dan y
x = np.linspace(0, 10, 100)
y = np.linspace(0, 5, 10)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Penampang
Z_bawah = A1(X)
Z_tengah = (A1(X) + A2(X)) / 2
Z_atas = A2(X)

# Plot 3D
fig = go.Figure()

fig.add_trace(go.Surface(z=Z_bawah, x=X, y=Y, colorscale='Viridis', name='Penampang Bawah', o
fig.add_trace(go.Surface(z=Z_tengah, x=X, y=Y, colorscale='Greens', name='Penampang Tengah',
fig.add_trace(go.Surface(z=Z_atas, x=X, y=Y, colorscale='Cividis', name='Penampang Atas', opa

fig.update_layout(
    title='Visualisasi 3D Penampang Bawah, Tengah, dan Atas',
    scene=dict(
        xaxis_title='Jarak Horizontal (x)',
        yaxis_title='Kedalaman / Interval Vertikal (h)',
        zaxis_title='Luas Penampang (A)'
    ),
```

```
    margin=dict(l=0, r=0, b=0, t=50)
)

fig.show()
```

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

5.4.2.3 Metode Grid / Kontur

Metode **Grid / Kontur** (Contour Area Method) digunakan untuk menghitung volume material yang terperangkap antara beberapa kontur, sering digunakan pada peta topografi atau hasil pemetaan drone. Dalam metode ini, volume dihitung dengan memperkirakan volume antar pasangan kontur. Rumus Umum:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1}) \cdot h$$

Keterangan:

- V: Volume material antara kontur
- A_i: Luas kontur pada titik i
- A_{i+1}: Luas kontur pada titik $i+1$
- h: Jarak vertikal antara dua kontur (biasanya jarak antar level kontur)

Diketahui:

Anda memiliki beberapa kontur yang membentuk area pada peta topografi atau hasil pemetaan drone. Misalkan ada beberapa titik kontur dengan nilai luas A_i dan A_{i+1} pada dua titik yang berdekatan. Anda juga mengetahui jarak vertikal antar kontur h.

Langkah Penyelesaian

Langkah 1: Tentukan Kontur dan Luas Area

Misalkan terdapat 5 kontur pada interval $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$, yang memiliki luas area masing-masing: A_1, A_2, A_3, A_4, dan A_5.

Langkah 2: Setiap Pasangan Kontur, untuk setiap pasangan kontur, volume dihitung dengan rumus:

$$V = \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1}) \cdot h$$

Dimana:

- A_i dan A_{i+1} adalah luas kontur pada pasangan kontur.
- h adalah jarak vertikal antara dua kontur tersebut.

Langkah 3: Volume total dihitung dengan menjumlahkan volume dari setiap pasangan kontur:

$$V_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1}) \cdot h$$

Contoh Perhitungan:

Misalkan kita memiliki lima kontur yang terpisah oleh jarak vertikal $h = 10$ satuan, dengan luas kontur sebagai berikut:

- $A_1 = 150$
- $A_2 = 170$
- $A_3 = 190$
- $A_4 = 210$
- $A_5 = 230$

Berikut adalah perhitungan volume antar setiap pasangan kontur.

Volume antara A_1 dan A_2:

$$V_{1-2} = \frac{1}{2}(150 + 170) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 320 \cdot 10 = 1600$$

Volume antara A_2 dan A_3:

$$V_{2-3} = \frac{1}{2}(170 + 190) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 10 = 1800$$

Volume antara A_3 dan A_4:

$$V_{3-4} = \frac{1}{2}(190 + 210) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 10 = 2000$$

Volume antara A_4 dan A_5:

$$V_{4-5} = \frac{1}{2}(210 + 230) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 440 \cdot 10 = 2200$$

Jumlahkan Semua Volume

$$V_{\text{total}} = 1600 + 1800 + 2000 + 2200 = 7600 \text{ satuan volume}$$

Volume Material

$$\boxed{V_{\text{total}} = 7600 \text{ satuan volume}}$$

Visualisasi Volume Kontur

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Kontur data
kontur_x = [0, 2, 4, 6, 8]
kontur_y = [150, 170, 190, 210, 230]

# Membuat grid untuk visualisasi
```

```
x = np.linspace(0, 8, 100)
y = np.linspace(0, 240, 50)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Fungsi untuk mensimulasikan kontur
Z = np.interp(X, kontur_x, kontur_y)

# Membuat plot 3D
fig = go.Figure()

fig.add_trace(go.Surface(z=Z, x=X, y=Y, colorscale='Viridis', opacity=0.9))

fig.update_layout(
    title='Visualisasi 3D Kontur dan Volume Material',
    scene=dict(
        xaxis_title='Jarak Horizontal (x)',
        yaxis_title='Kontur (A)',
        zaxis_title='Ketinggian / Volume'
    ),
    margin=dict(l=0, r=0, b=0, t=50)
)

fig.show()
```

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

5.4.2.4 Metode Cross-Section

Metode Cross-Section (Potongan Melintang) Digunakan ketika data penampang tersedia dalam bentuk potongan secara berkala (berderet).

Rumus:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1}) \cdot h_i$$

5.4.2.5 Metode Numerical Integration

Metode Numerical Integration digunakan jika fungsi area kontur ($A(x)$) diketahui secara matematis.

- **Metode Trapesium:**

$$V \approx \frac{h}{2}(A_1 + A_2)$$

- **Metode Simpson 1/3 Rule (butuh 3 titik):**

$$V \approx \frac{h}{3}(A_1 + 4A_m + A_2)$$

5.4.3 Stripping Ratio

Jika:

- V_o: volume overburden
- V_r: volume material berharga

Maka:

$$\text{Stripping Ratio} = \frac{V_o}{V_r}$$

Contoh penggunaan integral:

$$V_o = \int_a^b h_o(x)\,dx, \quad V_r = \int_a^b h_r(x)\,dx$$

5.4.4 Sebaran Ledakan Partikel

Luas di bawah kurva distribusi digunakan untuk menghitung persen kumulatif:

$$\text{Cumulative Mass \%} = \int_0^d f(x)\,dx$$

5.4.5 Estimasi Volume Cadangan

Diberikan fungsi $A(x) = 100 + 10x$, pada interval 0–10 (meter). Estimasi volume cadangan:

$$V = \int_0^{10} (100 + 10x)\,dx = [100x + 5x^2]_0^{10} = 1000 + 500 = 1500 \text{ m}^3$$

5.5 Latihan Soal

1. Hitung:

$$\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$$

2. Gunakan metode substitusi untuk menghitung:

$$\int x\cos(x^2)\,dx$$

3. Hitung volume overburden dengan profil $h(x) = 10 - x$, $x = 0$ sampai $x = 5$

4. Jika distribusi ukuran partikel mengikuti fungsi $f(x) = e^{-x}$, berapa persen partikel < 2 cm?

$$\int_0^2 e^{-x}\,dx$$

5.6 Latihan Studi Kasus

5.6.1 Cadangan Tambang

Deskripsi:
Sebuah penampang tambang menunjukkan bahwa luas penampang mineral di kedalaman tertentu dapat dimodelkan dengan fungsi:

$$A(x) = 120 + 15x - 0.5x^2$$

dengan $A(x)$ dalam m² dan x adalah kedalaman (meter), dari $x = 0$ hingga $x = 10$ meter.

Pertanyaan:

Hitung volume total cadangan dengan:

$$V = \int_0^{10} A(x)\, dx$$

5.6.2 Lapisan Tanah Penutup

Deskripsi:
Lapisan tanah penutup (overburden) memiliki ketebalan yang berubah-ubah dan dimodelkan dengan:

$$h_o(x) = 8 + 2\sin\left(\frac{\pi x}{20}\right)$$

x dalam meter (0–20 m). Panjang area ke arah dalam (tegak lurus sumbu x) adalah 50 m.

Pertanyaan:

1. Hitung volume tanah penutup:

$$V = \int_0^{20} h_o(x) \cdot 50\, dx$$

2. Interpretasikan hasilnya dalam konteks logistik dan perencanaan alat berat.

5.6.3 Massa Total Material

Deskripsi:
Sebuah silo menyimpan material hasil galian dengan kerapatan bervariasi:

$$\rho(y) = 2.5 + 0.1y \quad (\text{ton/m}^3)$$

Luas alas silo = 10 m², tinggi = 6 m.

Pertanyaan:

1. Hitung massa total material:

$$M = \int_0^6 \rho(y) \cdot 10 \, dy$$

2. Jelaskan bagaimana variasi kerapatan memengaruhi massa total.

5.6.4 Optimasi Volume Galian

Deskripsi:

Tambang terbuka memiliki profil penampang:

$$A(x) = 60x - 2x^2$$

dengan $x \in [0, 15]$ meter. Biaya per meter horizontal tergantung pada luas area:

$$C(x) = 50 \cdot A(x)$$

Pertanyaan:

1. Hitung volume penggalian:

$$V(a) = \int_0^a A(x) \, dx$$

2. Hitung biaya total penggalian:

$$T(a) = \int_0^a C(x) \, dx = 50 \int_0^a A(x) \, dx$$

3. Tentukan nilai a optimal (maksimum panjang penggalian) sebelum $A(x)$ menjadi nol untuk efisiensi maksimal.

5.6.5 Optimasi Produksi Tambang

Deskripsi:

Sebuah proyek tambang batu bara beroperasi selama 30 hari. Jumlah pekerja dan alat berat yang digunakan setiap hari diatur secara bertahap agar menyesuaikan kebutuhan lapangan:

- Jumlah pekerja harian dimodelkan sebagai:

$$P(t) = 30 + 10 \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$

- Jumlah alat berat per hari dimodelkan sebagai:

$$M(t) = 10 + 2 \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$

dengan t adalah hari ke-t, $0 \leq t \leq 30$.

Produksi harian batu bara (dalam ton) dimodelkan oleh:

$$Q(t) = 20 \cdot P(t)^{0.6} \cdot M(t)^{0.4}$$

Pertanyaan:

1. **Tentukan total produksi batu bara selama 30 hari.**

$$\text{Total produksi} = \int_0^{30} Q(t)\,dt$$

2. Jika biaya gaji per pekerja per hari adalah Rp 500.000 dan biaya sewa alat berat per unit per hari adalah Rp 2.000.000, tentukan:

   - Total biaya selama 30 hari:

$$\text{Biaya total} = \int_0^{30} [500{,}000 \cdot P(t) + 2{,}000{,}000 \cdot M(t)]\,dt$$

3. Hitung rata-rata produksi per biaya:

$$\text{Efisiensi produksi} = \frac{\int_0^{30} Q(t)\,dt}{\int_0^{30} [500{,}000 \cdot P(t) + 2{,}000{,}000 \cdot M(t)]\,dt}$$

Chapter 6

Pers. Nonlinear

Chapter 7

Pers. Non-Diferensial

Chapter 8

Pers. Diferensial Biasa

Chapter 9

Pers. Diferensial Parsial

Chapter 10

Pemodelan Stokastik

Chapter 11

Pemodelan Regresi